



UNIVERZITET CRNE GORE  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET



LIDIJA VUKSANOVIĆ

**FURIJEOVA TRANSFORMACIJA SIGNALA  
DEFINISANIH NA ORIJENTISANIM GRAFOVIMA**

– MASTER RAD –

PODGORICA, 16. DECEMBAR 2024.

## PODACI I INFORMACIJE O MAGISTRANDU

Ime i prezime: **Lidija Vuksanović**

Datum i mjesto rođenja: **7. februar 2000. godine, Cetinje**

Prethodno završene studije:

**Elektrotehnički fakultet, osnovne akademske studije, studijski program:  
Elektronika, telekomunikacije i računari, 2022. godine**

## INFORMACIJE O MASTER RADU

Naziv master studija: **Master studije, studijski program Računari**

Naslov rada: **Furijeova transformacija signala definisanih na orijentisanim  
grafovima**

Fakultet na kojem je rad odbranjen: **Elektrotehnički fakultet Podgorica**

## UDK, OCJENA I ODBRANA MASTER RADA

Datum prijave master rada: **07.06.2024.**

Datum sjednice Vijeća na kojoj je prihvaćena tema: **10.07.2024.**

Mentor: **Prof. dr Miloš Daković**

Komisija za ocjenu rada:

1. **Prof. dr Ljubiša Stanković**, ETF Podgorica - predsjednik
2. **Prof. dr Miloš Daković**, ETF Podgorica - mentor
3. **Doc. dr Miloš Brajović**, ETF Podgorica - član

Komisija za odbranu rada:

1. **Prof. dr Ljubiša Stanković**, ETF Podgorica - predsjednik
2. **Prof. dr Miloš Daković**, ETF Podgorica - mentor
3. **Doc. dr Miloš Brajović**, ETF Podgorica - član

Datum odbrane: **27.02.2025.**



# Sažetak

Značajnu prepreku za spektralnu analizu orijentisanih grafova predstavlja nemogućnost upotrebe Furijeove transformacije u velikom broju slučajeva usljed nedijagonalizabilnosti i singularnosti matrice susjedstva. Ovaj rad uvodi metodu koja pažljivo prilagođava topologiju grafa, čineći minimalne, ali efikasne promjene nad matricom susjedstva koje omogućavaju spektralnu analizu. Dodavanjem grana između linearno zavisnih redova i kolona matrice susjedstva (čvorova), kao i prilagođavanjem težina dodatih grana, obezbjeđuje se da matrica susjedstva grafa postane dijagonalizabilna i nesingularna. Ove izmjene omogućavaju efikasnu i preciznu spektralnu analizu korištenjem Furijeove transformacije, pri čemu osnovna struktura grafa ostaje očuvana.

**Ključne riječi:** Furijeova transformacija, orijentisani grafovi, matrica susjedstva, Jordanovi blokovi, sopstvene vrijednosti

# Abstract

A significant obstacle in spectral analysis of directed graphs is the inability to apply the Fourier transform in many cases due to the non-diagonalizability and singularity of the adjacency matrix. This paper introduces a method that carefully adjusts the graph's topology, making minimal yet effective changes to the adjacency matrix, enabling spectral analysis. By adding edges between linearly dependent rows and columns of the adjacency matrix (nodes), as well as adjusting the weights of the added edges, the adjacency matrix is made diagonalizable and non-singular. These modifications allow for efficient and accurate spectral analysis using the Fourier transform, while preserving the core structure of the graph.

**Keywords:** Fourier transform, directed graphs, adjacency matrix, Jordan blocks, eigenvalues

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod i prethodna istraživanja</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grafovi</b>	<b>5</b>
2.1	Tipovi grafova . . . . .	7
2.1.1	Neorijentisani grafovi . . . . .	11
2.1.2	Orijentisani grafovi . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Obrada signala</b>	<b>16</b>
3.1	Obrada signala na grafovima . . . . .	19
3.2	Odnos signala i šuma kao mjera očuvanja signala originalnog grafa . . . . .	22
3.3	Sopstvene vrijednosti . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Furijeova transformacija</b>	<b>26</b>
4.1	Diskretna Furijeova transformacija . . . . .	27
4.2	Furijeova transformacija na neorijentisanim grafovima . . . . .	27
4.3	Furijeova transformacija na orijentisanim grafovima . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Predloženo rješenje</b>	<b>33</b>
5.1	Singularne i nedijagonalizabilne matrice . . . . .	34
5.2	Jordanovi blokovi . . . . .	35
5.2.1	Eliminacija Jordanovih blokova . . . . .	36
5.3	Metoda i podaci . . . . .	38
5.4	Primjer i analiza dobijenih rezultata . . . . .	45

**Zaključak** 56

**Literatura** 57

# Glava 1

## Uvod i prethodna istraživanja

Na samom početku želim da istaknem motiv ovog istraživanja. Naime, kako živimo u vremenu kada se tehnologija i mreže razvijaju velikom brzinom i kako baze podataka pohranjuju sve veći broj podataka i informacija, potrebno je naći način za što bržu i lakšu analizu tih podataka. Kako su ljudi vizuelna bića, najintuitivniji način obrade podataka su grafovi. Sve što je grafički prikazano, može se, u manjoj ili većoj mjeri, analizirati i bez dodatnih “pomagala” u vidu raznih algoritama, transformacija i softvera (koji su zasnovani na nekim algoritmima i transformacijama). Opet, isključivo vizuelna analiza često nije dovoljna, zbog toga je cilj rada bio omogućavanje da se bilo koji podaci prikazani na grafu (orijentisanom) mogu analizirati koristeći, jednu od najčešće upotrebljivanih transformacija za analizu signala, Furijeovu transformaciju (FT).

*Zbog čega kažem podaci, a ne signali, kada govorimo o oblasti obrade signala na grafovima?* Naime, signal može predstavljati bilo koji podatak, ne mora imati formu na koju smo navikli u teorijskim okvirima (sinusoidalne funkcije, eksponencijalne itd.).

Na samom početku možemo doći do još jednog pitanja. *Zbog čega je naglašeno da se radi o orijentisanim grafovima, a ne grafovima uopšte?* Odgovor na ovo pitanje će biti dat u poglavlju 2, u kojem su objašnjeni koncepti grafova i teorije grafova, kao i ključni momenti i razlike između orijentisanih i neorijentisanih grafova, i u poglavlju 4 sa stanovišta upotrebe Furijeove transformacije na orijentisanim i neorijentisanim grafovima i naglaskom zbog čega je fokus baš na orijentisanim grafovima.

Ukratko, neorijentisani grafovi su grafovi kod kojih se signali od čvora do čvora mogu kretati u oba smjera, što ih čini simetričnim i samim tim njihov oblik je u startu pogodan za transformacije (u ovom radu konkretno Furijeovu transformaciju) i analizu. Sa druge

strane, orijentisani grafovi su rijetko simetrični, oni su singularni i nedijagonalizabilni, što onemogućava njihovu analizu. Kako bi analiza orijentisanih grafova postala moguća, neophodno je izvršiti određene modifikacije na matrici susjedstva, kojom se predstavljaju veze između čvorova. U ovom radu će biti predstavljena i analizirana predložena modifikacija matrice susjedstva kojom se omogućava analiza signala na grafovima koristeći Furijeovu transformaciju.

Naime, ova modifikacija podrazumijeva dodavanje grana sa malom težinom na određenim mjestima. Kriterijum za određivanje mjesta na kojima se grane dodaju i predstavljanje uspješnosti ove metode, kao i objašnjenje kako provjeriti da li je matrici susjedstva datog grafa potrebna modifikacija, su detaljno opisani u poglavlju 5.

Kako su jedan od kriterijuma stabilnosti i uspješnosti algoritma bile sopstvene vrijednosti, one su, uz osnovne koncepte klasične obrade signala i obrade signala na grafovima, objašnjene u poglavlju 3.

Upotreba matrice susjedstva, kao referentne matrice za prikazivanje grafova, a ne Laplasijan kao što je to rađeno u radovima [1–3], je preuzeta iz radova [4, 5].

U radovima [4, 5] modifikacija matrice susjedstva se zasniva na dodavanju nula (eng. *zero-padding*). Konkretno, u slučajevima orijentisanih grafova koji nemaju puni rang matrice, na mjestima, odnosno čvorovima, koji dovode do smanjivanja ranga se dodaju grane, odnosno putanje sa novim čvorovima. Upravo ovi radovi su poslužili kao najveći orijentir i inspiracija za predloženu metodu.

Naravno, mnogobroji radovi su doprinijeli razvoju ovog polja, kao npr. [6, 7] u kojem se koristi Moebiusova transformacija. Zatim u radu [8] autori su razvili tehniku koja značajno poboljšava filtriranje signala i uklanjanje šuma. Prvo prate signal i određuju najveće promjene unutar signala, a zatim određenim optimizacionim algoritmom smanjuju velike varijacije frekvencija. U radu [9] predložene su nove metode za ubrzavanje računanja Furijeove transformacije signala predstavljenih na grafovima. Ovaj pristup je zasnovan na korištenju Haarovih transformacija i identifikaciji topoloških simetrija u grafu, što u ovom istraživanju nije mogao biti slučaj, uzeći u obzir da su orijentisani grafovi uglavnom nesimetrični.

Treba pomenuti jos jedno istraživanje koje je poslužilo kao inspiracija za ovaj rad. Naime, u radu [10] predstavljen je još jedan metod koji prevazilazi problem spektralne analize singularne i nedijagonalizabilne matrice susjedstva. To je urađeno tako što su prvo traženi izvori i ponori u grafu, zatim su između njih dodavane grane sa određenim težinama i na kraju, ukoliko rang matrice još uvijek nije dostigao punu vrijednost, traže

se linearno zavisni redovi i kolone i pravi se veza između njih (dodaje se grana).

U ovom istraživanju se određuju linearno zavisni redovi i kolone, čime dobijamo vremensku i računsku uštedu. Umjesto da provjeravamo rang matrice i determinantu tri puta, to će se raditi dva puta, na početku i kraju izvršavanja algoritma. Takođe, umjesto određivanja izvora, ponora, linearno zavisnih redova i kolona, i provjere koji su linearno zavisni redovi i kolone ujedno i izvori (ponori), kako se ne bi pravile duple ili nove veze, određuju se samo linearno zavisni redovi i kolone.

Utvrđeno je da smo sa vremena 0.074 sekundi u radu [10] došli do vremena izvršavanja od 0.016 sekundi na istom setu podataka koji će biti prikazan u poglavlju 5.4. Treba napomenuti da vrijeme izvršavanja neće uvijek biti isto, jer su predstavljene vrijednosti dobijene kao srednja vrijednost vremena izvršavanja nakon 10 ponavljanja algoritma.

Na osnovnu prethodnih istraživanja postavljene su 3 hipoteze:

1. Dodavanje grana sa težinom manjom od jedan kod orijentisanih grafova omogućava korištenje Furijeove transformacije signala na grafu.
2. Mala težina dodatih grana omogućava da se modifikovani graf, sa stanovišta obrade signala na grafu, ne razlikuje mnogo od originalnog grafa.
3. Umetanje dodatnih čvorova duž dodatih grana daje mogućnost da sistem za obradu signala daje identičan izlazni signal na modifikovanom i originalnom grafu.

U narednim poglavljima će biti predstavljeno na koji način su sve tri hipoteze potvrđene.

Na samom kraju uvodnog dijela bih se još jednom osvrnula na strukturu rada. Dakle, u poglavlju 2 čitaoci će se upoznati sa osnovnim konceptima teorije grafova, grafovima i njihovom podjelom, sa detaljnijim uvidom u orijentisane i neorijentisane grafove.

Poglavlje 3 daje kratak pregled klasične obrade signala, a potom uvodi u obradu signala na grafovima. Takođe, ističe glavne razlike između klasične obrade signala i obrade signala na grafovima, kao i razloge zbog kojih je došlo do značajne ekspanzije ove oblasti. Još jedna veoma važna stvar objašnjena u ovom poglavlju su sopstvene vrijednosti koje su, u ovom istraživanju, ključan koncept za utvrđivanje stabilnosti sistema i neophodnost modifikacije matrice susjedstva.

U poglavlju 4 čitaoci će se upoznati sa Furijeovom transformacijom koja se, u ovom radu, koristi za spektralnu analizu signala definisanih na grafovima.

Na kraju, u poglavlju 5, opisan je postupak provjere da li matrica susjedstva ispunjava sve uslove kako bi se pristupilo analizi grafa. Ukoliko se dođe do zaključka da nije moguće

izvršiti analizu, vrši se postupak modifikacije matrice susjedstva, odnosno primjenjuje se predložena metoda. Takođe, čitaocima će biti predstavljeni rezultati predložene metode primijenjene na podacima iz realnog svijeta, kako bi se što bolje približio značaj ove oblasti, ne samo u teorijskim, već i u praktičnim okvirima. Nažalost, ova oblast do sada nije našla značajnu praktičnu primjenu već je još uvijek u teorijskim okvirima. Međutim, u budućnosti ima predispozicije da postane upotrebljiva i veoma korisna u rješavanju problema iz realnog svijeta.

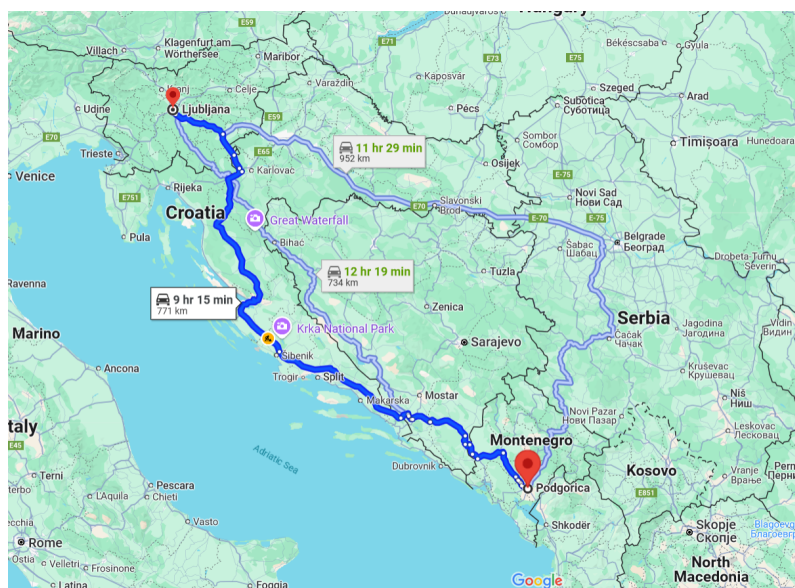
## Glava 2

# Grafovi

Teorija grafova je nauci poznata već nekoliko vjekova. Njena upotreba u inženjerstvu je počela sa Kirhofovima zakonima (u XIX vijeku) [11]. Danas grafovi imaju širok spektar upotrebe počevši od matematike, računarskih nauka, informacionih tehnologija, komunikacionih mreža, teorije kodiranja, preko biohemije, hemije itd. Takođe, primjenjuje se u brojnim aplikacijama kao što su radari, dizajn električnih kola, adresiranje komunikacionih mreža i upravljanje bazama podataka [1, 12, 13].

U radu [13] opisano je nekoliko interesantnih primjera i načina funkcionisanja grafova, kako iz svakodnevnog života, tako i u oblasti nauke. Jedan zanimljiv primjer je prikazan u nastavku.

Google mapa je aplikacija poznata velikom broju ljudi. Ona predstavlja graf, a putanja koju biramo da nam prikaže predstavlja pretraživanje najkraće ili optimalne putanje. Funkcioniše tako što koristi neku vrstu pretraživanja (pretraživanje po širini, pretraživanje po dubini, Dijkstrin algoritam, A\* algoritam itd.) [14] i određuje najbolji put od čvora A do čvora B. Čvorovi Google mape mogu biti gradovi, mjesta, ulice, objekti ili neki drugi parametri koji mogu biti odrednica za prostor, a ivice predstavljaju puteve između tih gradova, mjesta ili objekata.



**Slika 2.1:** Putanja od Podgorice do Ljubljane. Slika je napravljena koristeći Google mapu [15].

Na slici 2.1 je prikazana putanja od Podgorice (početni čvor) do Ljubljane (krajnji čvor). Možemo primijetiti da su prikazane tri potencijalne putanje. Međutim, predložena (od strane Google mape) je ona koja je u trenutku pretrage bila optimalna (vremenski). *Šta to znači? Kako Google mapa određuje šta je optimalan put?* Da bi se stiglo od tačke A do tačke B (u ovom slučaju od Podgorice do Ljubljane) postoji više puteva. Google mapa će provjeriti sve moguće (i onu sa najmanjom i sa najvećom kilometražom). Najkaći put ne mora uvijek biti i najbrži. Za pretraživanje Google mapa koristi kombinaciju algoritama za pretraživanje putanja, a zatim dodatno uzima stanje na putevima i na osnovu svih parametara određuje optimalnu (najbržu) putanju [16–18].

Kao što je nagoviješteno prethodnim primjerom grafovi su strukture koje se sastoje od skupa čvorova i grana (ivica) koje povezuju te čvorove [19]. Graf se može definisati kao  $G = \{V, E\}$ , gdje je:

- $V$  skup čvorova
- $E$  skup grana, takav da svaka grana predstavlja uređeni par  $(u, v)$  upućujući na povezanost od čvora  $u$  ka čvoru  $v$

Grafovi se mogu predstaviti *matricom susjedstva*  $A$  ili *težinskom matricom*  $W$  kojima se opisuje povezanost između čvorova. Ukoliko imamo  $N$  čvorova u grafu, dimenzije matrica će biti  $N \times N$ . Elementi matrice susjedstva  $A$  su nule i jedinice. Nula označava

nepostojanje grane na toj poziciji (veze između dva čvora), a jedinica označava da na tom mjestu postoji grana u grafu [19].

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) \in E \\ 0 & \text{if } (i, j) \notin E \end{cases}$$

Težinske matrice, sa druge strane, imaju nulte i nenulte elemente  $x$  (pozitivni realni brojevi). Njihova reprezentacija je ista kao i kod matrice susjedstva, nula označava nepostojanje grane na zadatoj poziciji, dok je nenulti element indikator postojanja grane sa upisanom težinom.

$$W_{ij} = \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ & \text{ako je } (i, j) \in E \\ 0 & \text{ako je } (i, j) \notin E \end{cases}$$

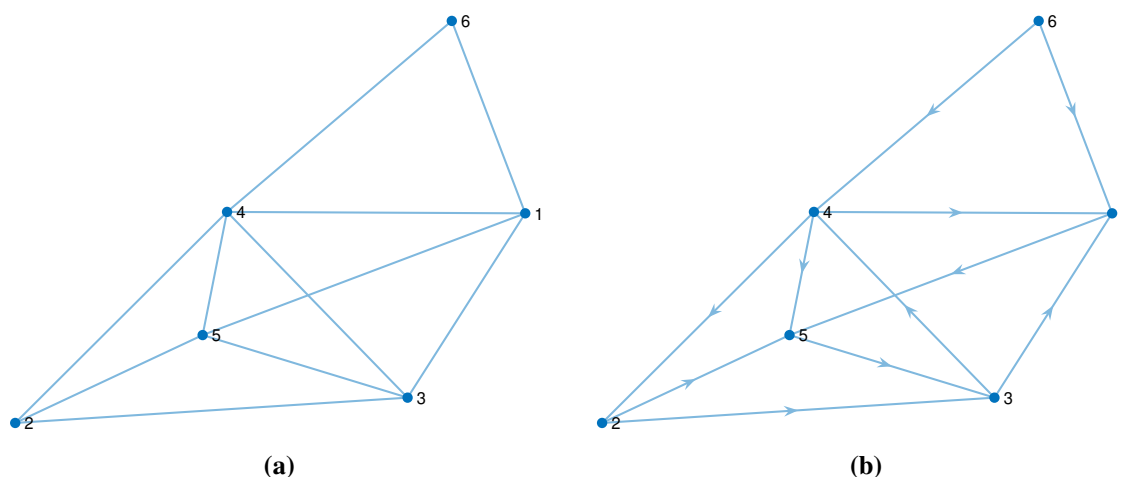
Može se uočiti da je težinska matrica specijalan slučaj matrice susjedstva kod kojih na mjestima postojećih grana umjesto jedinice stoji težina grane.

*Koje su razlike između težinske matrice i matrice susjedstva?* Suštinski nema velikih razlika, one se odnose na vrstu informacija koje želimo da predstavimo. Ukoliko su nam važne samo informacije o povezanosti između čvorova, tačnije da li grana između dva čvora postoji ili ne, koriste se matrice susjedstva. Sa druge strane, ako su nam potrebne i težine, koje mogu predstavljati bilo koji podatak (udaljenost, vjerovatnoću, brzinu, temperaturu itd.) koriste se težinske matrice. Zaključuje se da matrica susjedstva prikazuje samo strukturu grafa, dok težinska matrica daje i dodatne informacije o međusobnoj povezanosti čvorova.

## 2.1 Tipovi grafova

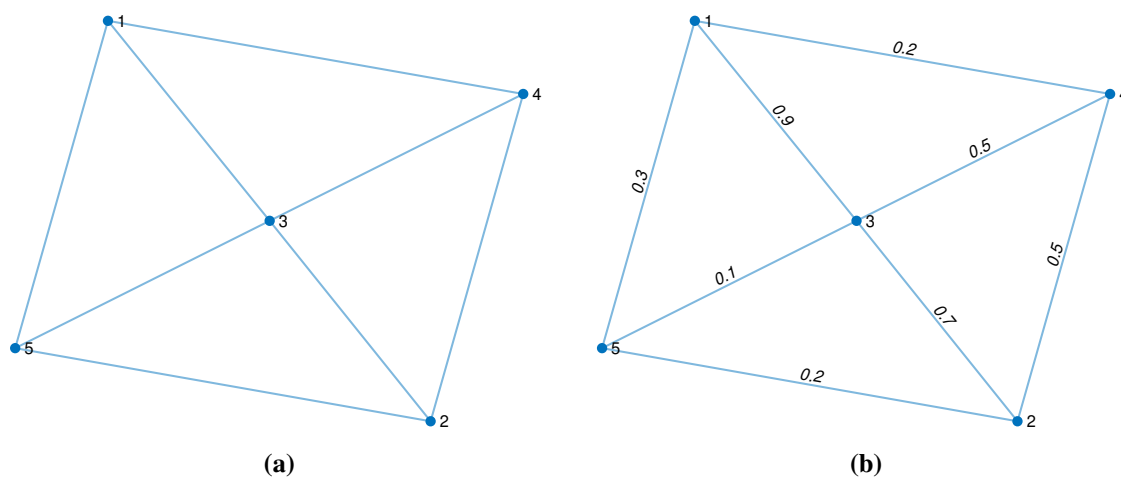
Grafovi se mogu podijeliti u više kategorija. Prema usmjerenosti veza (čemu će se posvetiti najviše pažnja u ovom radu), prema težini, povezanosti, strukturi i osobinama. Takođe, postoje i specijalni tipovi grafova.

Prema usmjerenosti se mogu dijeliti na neorijentisane (grafovi čije ivice nijesu usmjerene) i orijentisane (grafovi čije su ivice usmjerene). Na slici 2.2 prikazana su dva grafa kako bi se uputilo na njihove razlike. Međutim, o njima će više riječi biti u narednoj sekciji.



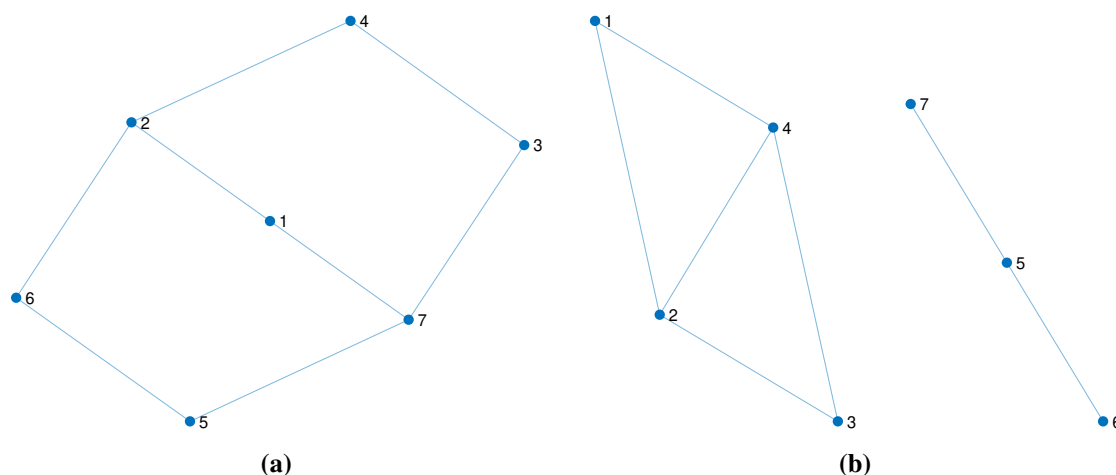
**Slika 2.2:** Usmjerenost grafova. (a) Orijetisani graf i (b) neorijentisani graf.

Prema težini, kao što je već pomenuto u prethodnoj sekciji, se dijele na težinske (sva-koj grani grafa je dodijeljena određena težina, koja može imati različita značenja, u za-visnosti od toga šta graf predstavlja - udaljenost, trošak, vjetovatnoću itd.) i bestežinske (granama grafa nije dodijeljena određena težina i obično se smatra da je ona jednaka jedinici). Primjer ovog tipa grafa je prikazan na slici 2.3.



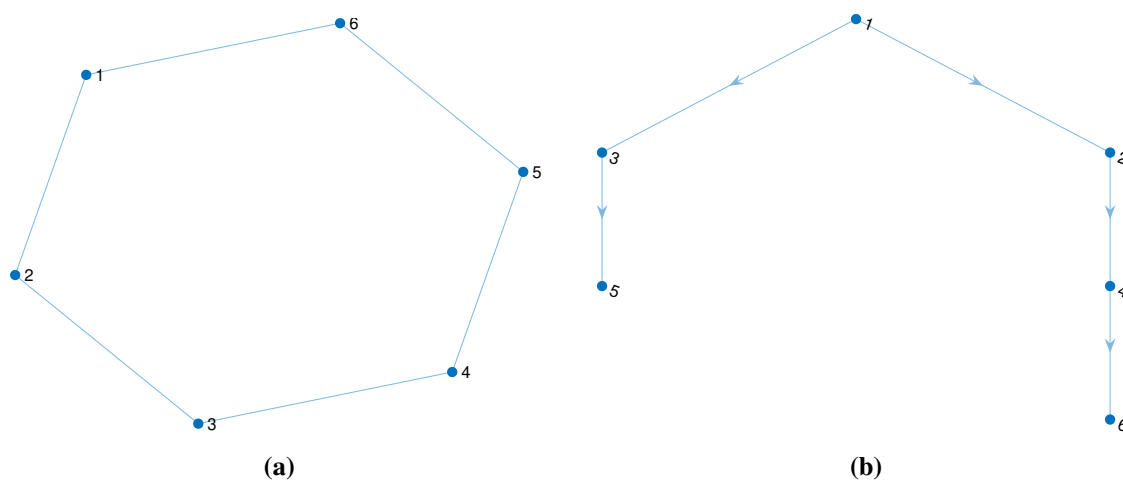
**Slika 2.3:** Težina grafova. (a) Bestežinski graf i (b) težinski graf.

Grafovi se mogu podijeliti i na povezane i nepovezane, što je i prikazano na slici 2.4, ukoliko govorimo o povezanosti. Povezani grafovi su neorijentisani grafovi kod kojih su svi čvorovi međusobno povezani. Kod nepovezanih grafova postoji makar jedan par čvorova koji nije povezan sa ostatkom grafa.



**Slika 2.4:** Povezanost grafova. (a) Povezan graf i (b) nepovezan graf.

Ukoliko govorimo o strukturi i osobinama, grafovi mogu biti ciklični i orijentisani aciklični (slika 2.5). Govorimo o cikličnim grafovima ukoliko imamo grafove koji imaju putanju koja počinje i završava se u istom čvoru. Nasuprot njih su orijentisani aciklični grafovi (u kojima ne postoji nijedna putanja kod koje su polazni i krajni čvor isti).



**Slika 2.5:** Struktura grafova. (a) Ciklični graf i (b) orijentisani aciklični graf.

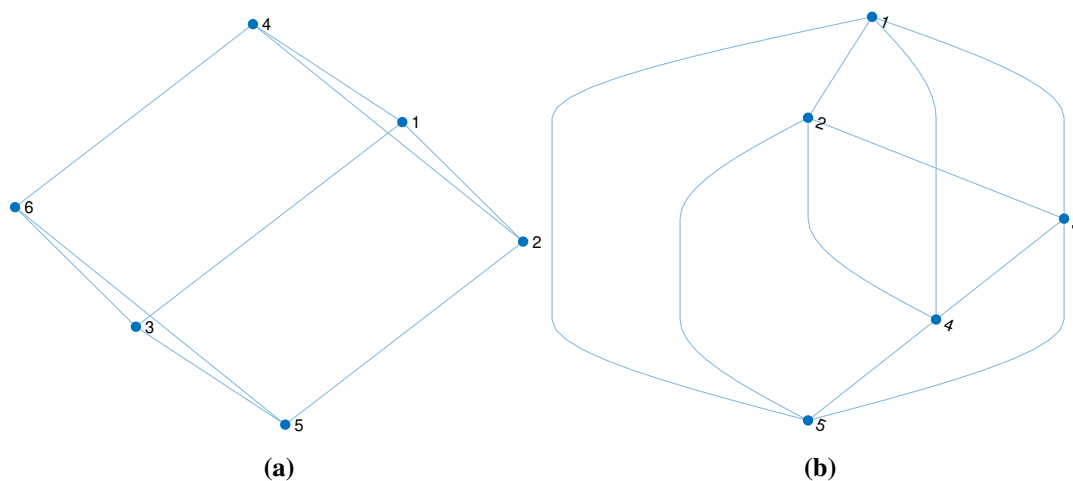
Neki od značajnijih specijalnih tipova grafova su: bipartitni, regularni, Hamiltonov graf itd.

Bipartitni graf je graf čiji se čvorovi mogu podijeliti u dva nezavisna skupa čvorova tako da čvorovi unutar istog skupa nijesu međusobno povezani. Tačnije, ukoliko imamo

skup čvorova A i skup čvorova B, čvorovi iz skupa A mogu biti povezani sa čvorovima iz skupa B, ali unutar samih skupova ne smiju postojati konekcije [19].

Regularni graf je graf kod kojeg svaki čvor ima isti *stepen povezanosti*. Stepen povezanosti predstavlja broj konekcija između čvorova, za svaki čvor posebno. To bi značilo da je svaki od čvorova povezan sa  $N$  drugih čvorova, gdje  $N$  predstavlja stepen povezanosti [19].

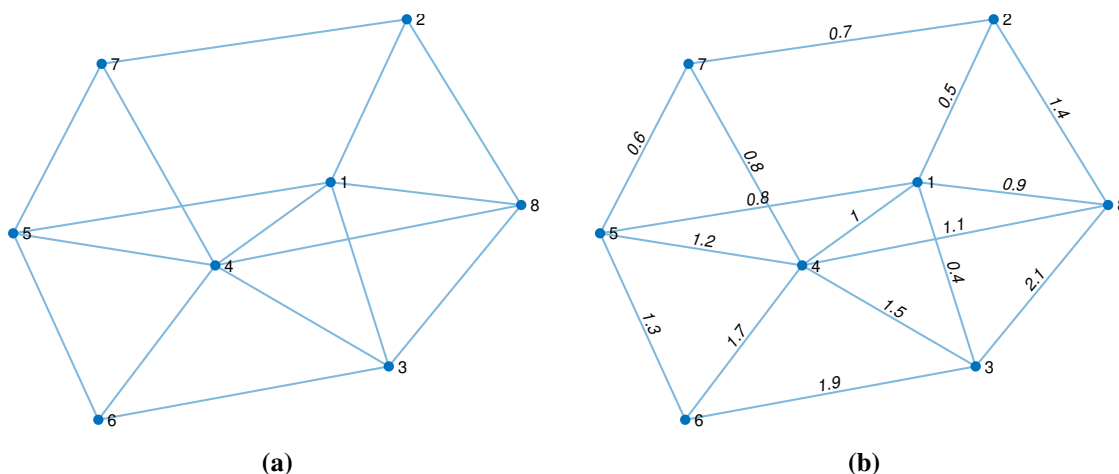
Hamiltonov graf predstavlja graf koji ispunjava pravila Hamiltonove staze. Šta je staza u grafu, a šta Hamiltonova staza? Staza predstavlja specijalnu vrstu kretanja, odnosno putanju, između čvorova, u kojoj se čvor može obići tačno jednom. Kod Hamiltonove staze se čvorovi, takođe, obilaze samo jednom, sa tom razlikom što se kod Hamiltonove staze svaki čvor mora obići, dok u prvom slučaju to nije neophodno [19, 20].



**Slika 2.6:** Specijalni tipovi. (a) Regularni graf i (b) Hamiltonov graf.

### 2.1.1 Neorijentisani grafovi

Neorijentisani grafovi su grafovi za koje važi da se od jednog do drugog čvora može kretati u oba smjera. Ukoliko pretpostavimo da imamo matricu susjedstva  $A_{ij}$  kod neorijentisanih grafova moguće je ići iz čvora  $i$  u čvor  $j$  i iz čvora  $j$  u čvor  $i$ .



**Slika 2.7:** Neorijentisani graf. (a) Graf koji se može predstaviti matricom susjedstva, njegove težine su 1 (na mjestima gdje grana postoji) i 0 (na mjestima gdje grana na postoji). (b) Graf koji se može predstaviti težinskom matricom, grana koja postoji u grafu je označena određenom težinom, dok se podrazumijeva vrijednost 0 na mjestima na kojima ne postoje grane.

Matrica susjedstva za neorijentisani graf sa slike 2.7a je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica susjedstva neorijentisanog grafa je simetrična. To znači da je:

$$A = A^T \quad (2.1)$$

gdje je  $A^T$  transponovana matrica susjedstva.

Težinska matrica za neorijentisani graf sa slike 2.7b je:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Težinska matrica, poput matrice susjedstva kod neorijentisanog grafa je, takođe, simetrična. Što znači da je:

$$W = W^T \quad (2.2)$$

gdje je  $W^T$  transponovana težinska matrica.

Šta predstavlja simetrična matrica? Koje su njene prednosti? Simetrična matrica je matrica kod koje su elementi u koloni  $i$  i redu  $j$  i elementi u redu  $i$  i koloni  $j$  isti.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (2.3)$$

Tako da, ukoliko imamo matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

njena transponovana matrica bi bila:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

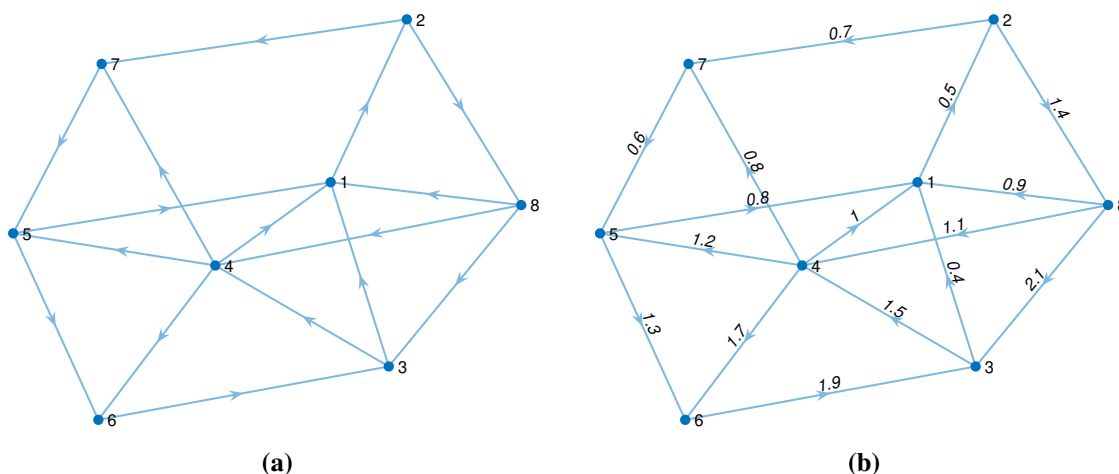
Kao što se može uočiti, transponovana matrica se dobije kada redovi i kolone originalne matrice zamijene mjesta. U cilju boljeg predstavljanja transponovanja, prethodni primjer nije primjer simetrične matrice.

Simetrične matrice imaju brojne prednosti. Najznačajnija, u oblasti obrade signala na grafovima, se odnosi na sopstvene vrijednosti koji su realni brojevi i na sopstvene vektore

koji su ortogonalni [19, 21], što olakšava dijagonalizaciju matrice, samim tim i obezbjeđuje, bez ili sa vrlo jednostavnim manipulacijama, spektralnu analizu sistema. Još jedna od prednosti odnosi se na računarsku memoriju i performanse. Kao što je već rečeno, matrica je simetrična ukoliko važi relacija (2.3). To bi značilo da je originalna matrica, u odnosu na glavnu dijagonalu, ista sa obje strane. Ovo nas dalje dovodi do zaključka da je dovoljno memorisati samo elemente koji su iznad ili ispod glavne dijagonale, ne mora se upisivati i pamtiti čitava matrica.

## 2.1.2 Orijetisani grafovi

Orijentisani grafovi su grafovi kod kojih se od jednog do drugog čvora krećemo u tačno definisanom smjeru. Ukoliko se od čvora  $i$  može doći do čvora  $j$ , ne znači da se od čvora  $j$  može stići do čvora  $i$  (kao što je slučaj kod neorijentisanih grafova). Smjer kretanja između čvorova se označava strelicama.



**Slika 2.8:** Orijetisani graf. (a) Graf koji se može predstaviti matricom susjedstva, njegove težine su 1 (na mjestima gdje grana postoji) i 0 (na mjestima gdje grana na postoji). (b) Graf koji se može predstaviti težinskom matricom, grana koja postoji u grafu je označena određenom težinom, dok se podrazumijeva vrijednost 0 na mjestima na kojima grane ne postoje.

Matrica susjedstva za orijentisani graf sa slike 2.8a je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Težinska matrica za orijentisani graf sa slike 2.8b je:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za razliku od neorijentisanih, za orijentisane grafove ne možemo uvijek reći da su simetrični, šta više, to je vrlo rijedak slučaj. To znači da je i spektralna analiza ovih grafova izazovnija i da bi se izvršila neophodne su manipulacije nad matricom susjedstva (ili težinskom matricom).

Kada se govori o orijentisanim grafovima, još jedna stvar na koju treba ukazati su izvori i ponori. Kod neorijentisanih grafova ih je nemoguće definisati, jer ne postoji smjer kretanja od čvora do čvora.

Izvori su čvorovi koji nemaju ulazne grane, tačnije čvorovi sa ulaznim stepenom (broj grana koji ulazi u jedan čvor) 0, a izlazni stepen (broj grana koji izlazi iz jednog čvora) je veći od 0. To znači da informacije ili tokovi počinju od tog čvora, ali do njega ništa ne dolazi. Ukoliko izlazni stepen čvora  $V$  označimo sa  $step^-(V)$ , a ulazni stepen sa  $step^+(V)$  da bi za neki čvor rekli da je izvor moraju biti ispunjeni sljedeći uslovi:

$$izvor = \begin{cases} step^-(V) > 0 \\ step^+(V) = 0 \end{cases}$$

Nasuprot izvora, ponori imaju izlazni stepen 0, dok je ulazni stepen veći od 0. To znači da se tokovi završavaju u tom čvoru, a da od njega ne odlaze bilo kakve informacije. Ukoliko, opet, uzmemo da je izlazni stepen čvora  $V$  označen kao  $step^-(V)$ , a ulazni stepen sa  $step^+(V)$  da bi za neki čvor rekli da je ponor mora ispuniti sljedeće uslove:

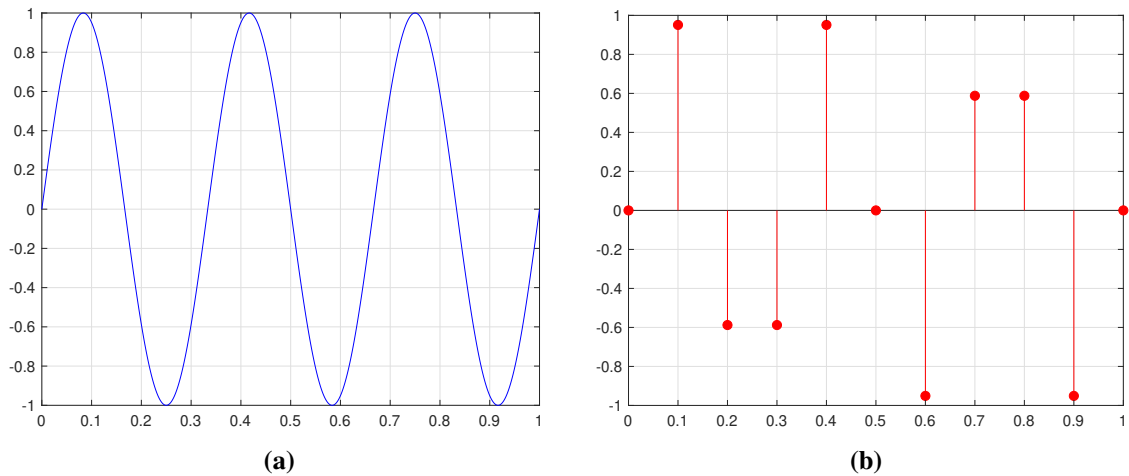
$$ponor = \begin{cases} step^-(V) = 0 \\ step^+(V) > 0 \end{cases}$$

## Glava 3

# Obrada signala

Obrada signala je oblast koja je prisutna u gotovo svim aspektima današnjeg društva. Većina ljudi nije ni svjesna da svakog dana koriste uređaje kod kojih se u pozadini dešavaju operacije obrade signala, npr. kod mobilnih uređaja, računara, autopilota u avionima itd. [22]. Takođe, razvojem društvenih mreža, sve veći broj ljudi je počeo da se bavi uređivanjem slika, video zapisa, audio signala, pravljenja raznih animacija i slično, nesvjesni da ništa od toga ne bi bilo moguće da se nauka na polju obrade signala nije razvijala.

Obrada signala najčešće podrazumijeva da ulazni signal pretvorimo u neku pogodnu formu, u zavisnosti od primjene signala, a da se pritom karakteristike i informacije koje nosi ulazni signal ne mijenjaju. Razlikujemo dva tipa klasične obrade signala: analogna i digitalna [23]. Govorimo o analognoj, ukoliko imamo signal koji je kontinualan, sa druge strane, ukoliko je signal diskretan govorimo o digitalnoj obradi signala. *Šta je kontinualan, a šta diskretan signal?* Kontinualan signal je signal u “sirovoj” formi, gdje je signal definisan u svakom vremenskom trenutku i neprekidan je. Sa druge strane, diskretni signal je onaj signal koji je predstavljen u vidu odbiraka. Ovo znači da se iz analognog signala uzimaju vrijednosti u određenim vremenskim trenucima i na osnovu njih se dobijaju odbirci.

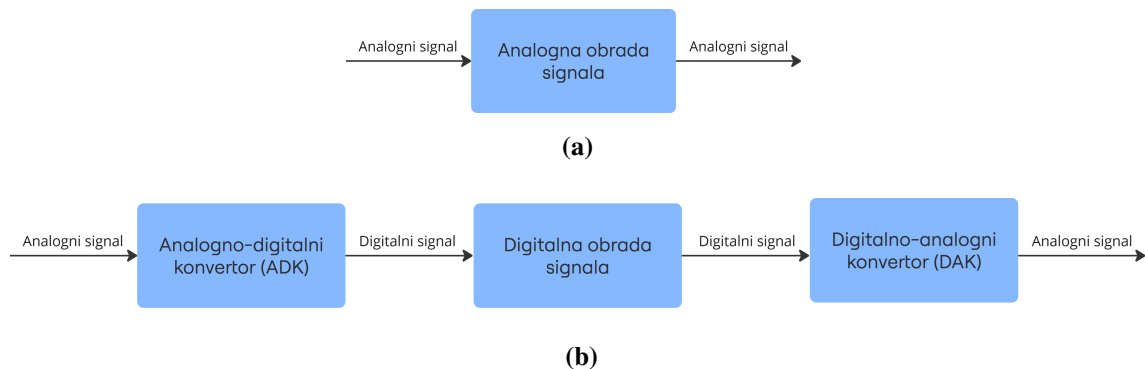


**Slika 3.1:** Primjer: (a) analognog signala, (b) digitalnog signala.

Na slici 3.1 je primjer istog signala predstavljenog u obliku kontinualnog (analognog) i diskretnog (digitalnog) signala respektivno. Kao primjer je uzet signal:

$$signal = \sin(2\pi f \cdot (t \text{ ili } n));$$

gdje se koristi  $t$  za kontinualne signale (vrijeme se posmatra kao neprekidno), a  $n$  za diskretne signale (vrijeme se posmatra kao niz tačaka ili uzoraka).



**Slika 3.2:** (a) analogna obrada signala, (b) digitalna obrada signala.

Dolazimo do pitanja: *Kako od analognog signala doći do digitalnog?* Kao što uočavamo sa slike 3.2b digitalni signal se dobija analogno-digitalnom konverzijom. Ova konverzija podrazumijeva odabiranje i kvantizaciju [24].

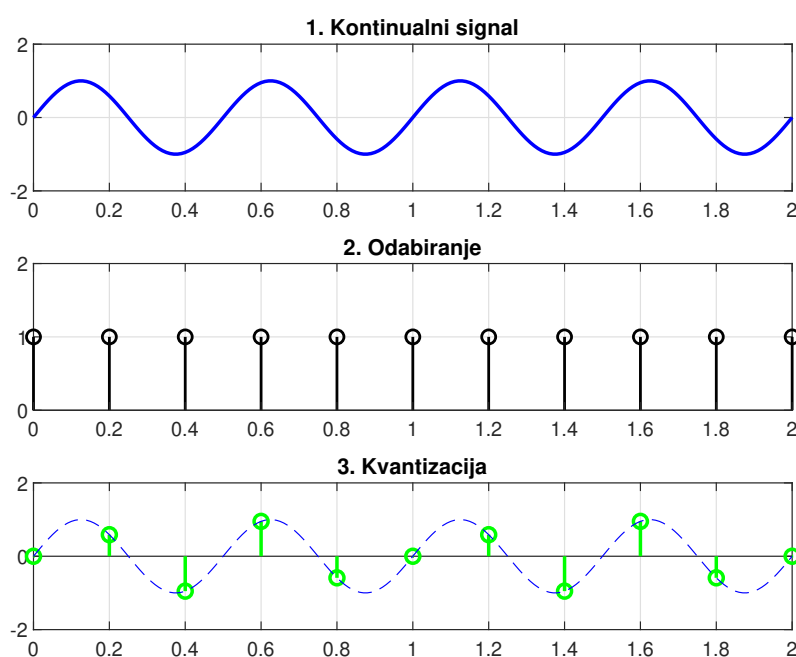
Teorema o odabiranju kaže da signal može biti rekonstruisan ako frekvencija odabiranja zadovoljava uslov:

$$f_s > 2 \cdot f_{max}$$

gdje je  $f_s$  frekvencija odabiranja, a  $f_{max}$  maksimalna frekvencija signala koju treba rekonstruisati [25]. Na osnovu ovog uslova se vrši odabiranje, što predstavlja prvi korak u konverziji analognog u digitalni signal, odnosno pretvaranje iz kontinualnog u diskretni.

Nakon odabiranja na red dolazi kvantizacija. Kvantizacija je proces u kojem se, u određen broj kvantizacionih nivoa amplitude dovode na neke definisane vrijednosti, tačnije, zaokružuju se na bližu cijelu vrijednost [25].

Dakle, u toku odabiranja određuju se momenti za koje će se informacije koje nosi originalni signal čuvati, a prilikom kvantizacije se određuju te vrijednosti, tačnije kakve će one biti u diskretnom obliku [26].



Slika 3.3: Analogno-digitalna konverzija.

Na slici 3.3 se, radi boljeg razumijevanja, nalazi i vizuelni prikaz konverzije kontinualnog u diskretni signal.

Dakle, kod obrade signala uvijek ćemo na ulazu imati analogne signale, dok na izlazu možemo imati ili analogni ili digitalni u zavisnosti od potreba.

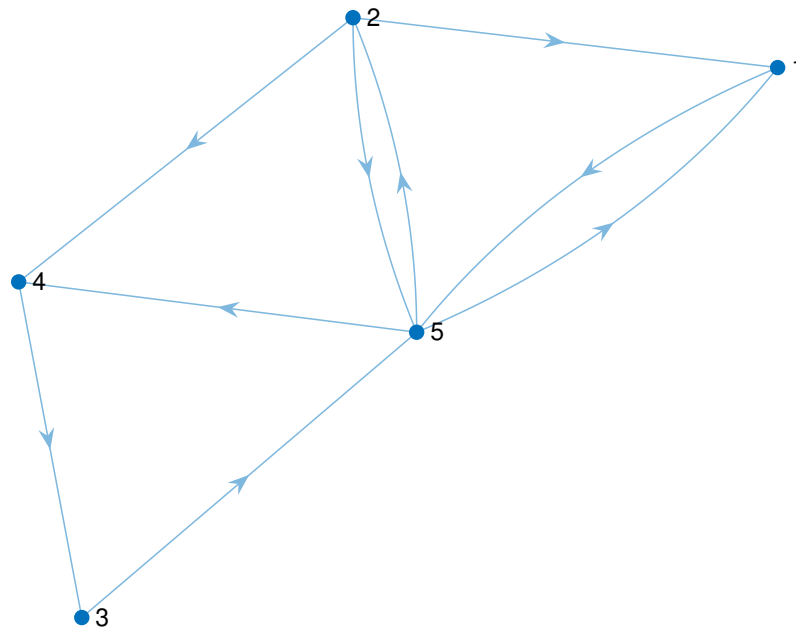
### 3.1 Obrada signala na grafovima

Grafovi su nepravilne strukture koje mogu prikazivati više različitih atributa i podataka u sklopu jednog grafa [27]. Njihova primarna funkcija nije bila, kao što je u ovom radu obrada signala, već analiza velikih setova podataka.

Danas, zbog njihove aktuelnosti i jednostavnosti grafovi se koriste za analizu signala čiji domen nije jasno definisan. Kao što je poznato, obrada signala se obavlja za signale definisane u vremenskom ili prostornom domenu. Kada imamo neregularne domene, situacija sa obradom i analizom signala je značajno otežana. Upravo je ovo razlog zbog kojeg je i počelo istraživanje obrade signala na grafovima [27].

Krenimo redom. U prethodnom poglavlju su objašnjeni osnovni koncepti grafova, pa fokus neće biti na njima, samo ćemo se osvrnuti na par stvari. Dakle, grafovi su definisani kroz čvorove i ivice (grane). Ivice su linije koje povezuju dva čvora između kojih postoji neka veza. Sami čvorovi sadrže signale, dok ivice prenose signale između čvorova koji su međusobno povezani.

Pretpostavimo da imamo graf sa 5 čvorova, kao što je prikazano na slici 3.4. Svaki od pet čvorova sadrži neki signal (u zavisnosti od toga šta je grafom predstavljeno), a signali su međusobno povezani ukoliko postoje veze između čvorova. U zavisnosti od toga da li je graf orijentisan ili neorijentisan signal se može kretati u jednom ili oba smjera. Na slici 3.4 dat je primjer orijentisanog grafa gdje se signali kreću u smjeru koji je prikazan strelicama.



**Slika 3.4:** Primjer grafa sa 5 čvorova i 9 ivica (grana).

Kod klasične obrade signala, funkcija sistema je da od ulaznog, uz pomoć određenih transformacija, dobije izlazni signal. Ovaj “jednostavan” način je moguć kada imamo sisteme definisane u jednom domenu. Međutim, kako se tehnologija razvija, posebno u kontekstu društvenih mreža i kompleksnih setova podataka, ovaj pristup postaje ograničen i nedovoljno precizan za analizu. Stoga se razvija obrada signala na grafovima. Kod grafova, ne postoji “jednostavna” transformacija iz ulaznog u izlazni signal, već se koriste kombinacije originalnog signala i njegove “pomjerene” verzije. Kod grafova možemo imati nepravilne domene, što bi značilo da svi signali ne moraju biti u istom domenu, mogu predstavljati različite komponente, važno je da predstavljaju isti sistem i da signali koji definišu taj sistem budu međusobno povezani.

Dakle, izlaz signala, u oblasti obrade signala na grafovima, se može, analitički, odrediti pomoću funkcije:

$$y = h_0 \mathbf{A}^0 \mathbf{x} + h_1 \mathbf{A}^1 \mathbf{x} + \dots + h_{M-1} \mathbf{A}^{M-1} \mathbf{x} = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \mathbf{A}^m \mathbf{x} \quad (3.1)$$

gdje  $\mathbf{A}^m \mathbf{x}$  predstavlja vektor pomjerenih signala (eng. *shifted signal*), odnosno proizvod matrice susjedstva i vektora signala grafa. Postavlja se pitanje: *Šta u stvari predstavlja pomjeranje signala?* Donekle, samo ime nam daje odgovor na ovo pitanje, ali način na koji se pomjeranje signala vrši je značajan, tačnije šta on predstavlja. Naime, pomjeranje se vrši od jednog čvora ka svim čvorovima koji su povezani sa njim (obraćajući pažnju

na usmjerenje grana) [27]. Konkretno, predstavlja povezanost signala i kako signal jednog čvora može uticati na drugi, tačnije međusobnu povezanost signala u grafu. Dakle, pomjerenje signala se izvršava koristeći jednačinu:

$$\mathbf{x}_{pomjereni} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.2)$$

Kao primjer ćemo uzeti orijentisani graf sa slike 3.4 čija je matrica susjedstva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pretpostavimo da imamo vektor signala:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_{pomjereni}$  je određeno na osnovu relacije (3.2) i dobijene su sljedeće vrijednosti vektora “pomjerenih” signala:

$$\mathbf{x}_{pomjereni} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 + x_4 + x_5 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

Dakle, glavna razlika između klasične i obrade signala na grafovima, pored razlike u domenu, je u načinu dobijanja, odnosno reprezentaciji izlaznog signala. Kao što se može zaključiti, kod obrade signala imamo jedan signal u određenom domenu i na osnovu tog signala dobijamo izlazni. Ovo predstavlja “1 - na - 1” preslikavanje. Kod obrade signala na grafovima nemamo jedan, već više ulaznih signala koji su međusobno povezani, ali ne moraju biti u istom domenu. U ovom slučaju imamo “1 - na - mnogi” preslikavanje [27]. Ovo znači da jedan signal može uticati na više njih, tačnije da više različitih signala u manjoj ili većoj mjeri imaju međusobni uticaj na osnovu kojih se dobija izlazni signal.

Na kraju je važno pomenuti da ovaj način obrade signala ima širok spektar primjene. Senzorske mreže (eng. *sensor networks*) koje mogu obuhvatati različite scenarije. Prvi se

može odnositi na obradu signala koje prikupljaju bilo koji senzori postavljeni na različitim lokacijama, drugi se može odnositi na putnu mrežu i infrastrukturu saobraćajnica itd. Takođe, primjenu nalaze u biološkim mrežama, obradi slika, uklanjanju šuma, mašinskom učenju, obradi podataka u velikim setovima podataka i mnogi drugi [28].

## 3.2 Odnos signala i šuma kao mjera očuvanja signala originalnog grafa

Odnos signala i šuma (eng. *Signal-to-Noise Ratio* - SNR) je ključna mjera u nauci i inženjeringu koja pokazuje odnos između korisnog signala i šuma u sistemu [29]. Dakle, on nam može služiti ako provjera koliko je šum ili koliko su neke promjene ručno unešene narušile kvalitet originalnog signala i samim tim odrediti da li će i u kojoj mjeri analiza modifikovanog (narušenog originalnog) signala biti vjerodostojna.

SNR se izražava kao odnos snage originalnog signala i prisutnog šuma [30], najčešće se izražava u decibelima (dB). Formula za određivanje SNR-a je:

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{sum}}} \right) \quad (3.3)$$

gdje je  $P_{\text{signal}}$  snaga originalnog signala, a  $P_{\text{sum}}$  snaga šuma ili modifikacije originalnog signala.

Što je vrijednost SNR-a veća, to znači da je originalni signal jači od šuma i, samim tim, on neće unositi velike promjene u signalu, tačnije informacije koje prenosi signal će gotovo netaknute doći do krajnjeg korisnika. Sa druge strane, ako SNR ima malu vrijednost, to nam ukazuje na malu snagu signala što dovodi do velikog gubitka informacija, tačnije uticaj šuma na signal je veliki. Dakle, dolazimo do zaključka da je poželjno imati velike vrijednosti SNR-a kako bi bili sigurni da je originalni signal ostao u velikoj mjeri netaknut i da su informacije koje dobijaju korisnici iste one koje nosi originalni signal [30]. Kada, na primjer, slušamo radio, dokle god imamo čisti zvuk znači da je SNR visok, tačnije da je snaga originalnog signala mnogo veća od snage šuma. Kada počnemo da čujemo šuštanje ili se zvuk počne gubiti, to znači da snaga šuma postaje jača i vrijednost SNR-a pada.

Naime, kao što se može uočiti cilj je uticati na signale tako da njihova snaga uvijek nadjača šum, bilo da šum proizvode sami uređaji ili unose neki spoljašnji faktori. Ovo se može postići povećanjem jačine signala pomoću pojačavača, optimizacijom položaja

antena i upotrebom antena sa većim pojačanjem. Sa druge strane, smanjenje šuma putem filtriranja i pravilnog dizajniranja [30] sistema ima veliki uticaj na konačne vrijednosti SNR-a.

**Napomena:** U ovom radu šumom smo smatrali signal, odnosno graf, nakon modifikacija nad matricom susjedstva i na taj način odredili kolike su izmjene zaista unešene (koliko se signali na originalnom grafu razlikuju od signala na modifikovanom grafu) i da li se spektralna analiza može smatrati vjerodostojnom.

### 3.3 Sopstvene vrijednosti

Da bi objasnili sopstvene vrijednosti, moramo krenuti od sopstvenih vektora. Sopstveni vektori i sopstvene vrijednosti su vektori i skalari povezani sa kvadratnom matricom koji ih bliže određuju, tačnije pomažu u analizi strukture matrice [31]. Najčešće se definišu preko jednačine:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (3.4)$$

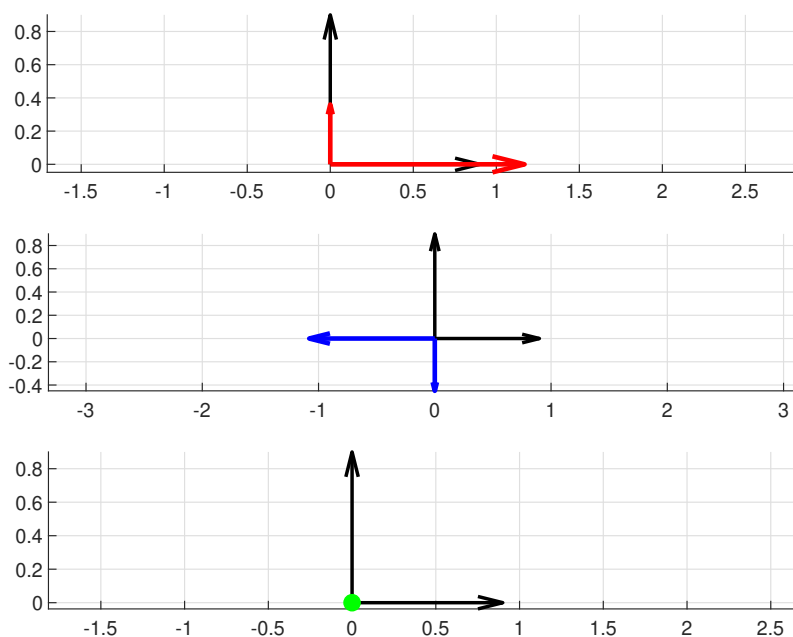
gdje je  $\mathbf{u}$  nenulti sopstveni vektor matrice  $A$ , a  $\lambda$  je skalar, odnosno sopstvena vrijednost, koji odgovara datom sopstvenom vektoru. Jednačina (3.4) se takođe može napisati kao:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

gdje je  $I$  jedinična matrica. Važno je naglasiti da sopstveni vektori moraju biti različiti od nule, dok sopstvene vrijednosti mogu imati vrijednost nula, ali to znači da imamo nepogodan oblik matrice, tačnije da se radi o singularnoj matrici [32]. Iz jednačine (3.4) se zaključuje da sopstveni vektori ne smiju imati vrijednost nula jer bi u tom slučaju jednačina bila  $0 = 0$ , tačnije ne daje nam bilo kakve informacije o matrici, pravcu i smjeru vektora.

Svaka matrica može vršiti neku operaciju nad vektorom (skaliranje, rotiranje, pomjeranje itd). Pronalaskom sopstvenih vektora matrice dobijamo upravo ove informacije. Konkretno, sopstveni vektori nikada ne mijenjaju svoj pravac, ova karakteristika ostaje, ono što se može mijenjati, u odnosu na sopstvene vrijednosti, su dužina i smjer vektora. Ukoliko je sopstvena vrijednost  $\lambda$  pozitivna, sopstveni vektor se produžava (kada je  $\lambda > 1$ ) ili skraćuje (kada je  $\lambda < 1$ ). Kada imamo slučaj u kojem  $\lambda$  ima negativnu vrijednost dolazi do produžavanja (skraćivanja) vektora i do mijenjanja njegovog smjera. Tačnije, negativne sopstvene vrijednosti preokreću orijentaciju vektora, a dužina vektora

zavisi od njihove apsolutne vrijednosti. Na kraju, u slučajevima kada imamo nultu sopstvenu vrijednost dobija se nulti vektor i neinvertibilna, odnosno singularna matrica. U ovim situacijama se obično pribjegava nekim modifikacijama kako bi se korigovale nulte sopstvene vrijednosti. Na koji način je to urađeno u ovom istraživanju, biće riječi u narednim poglavljima.



**Slika 3.5:** Uticaj sopstvenih vrijednosti na sopstvene vektore.

Na slici 3.5 vidimo tri grafička prikaza uticaja sopstvenih vrijednosti na sopstvene vektore. Vektori prikazani crnom bojom na sva tri grafika predstavljaju sopstvene vektore u pravcu  $x$  i  $y$  ose čiji je intenzitet jednak jedinici, dok su crvenom, plavom i zelenom bojom predstavljeni sopstveni vektori nakon uticaja sopstvenih vrijednosti.

Na prvom grafiku se može vidjeti kako pozitivne sopstvene vrijednosti utiču na intenzitet sopstvenih vektora. Duž  $x$  – ose sopstvena vrijednost iznosi 1.3 ( $\lambda > 1$ ), pa je došlo do produžavanja sopstvenog vektora duž  $x$  – ose. Sa  $y$  – osom imamo suprotan slučaj, sopstvena vrijednost je 0.4 ( $\lambda < 1$ ), pa je došlo do skraćivanja sopstvenog vektora duž  $y$  – ose. Na drugom grafiku, pored produžavanja i skraćivanja sopstvenog vektora, možemo primijetiti da je on promijenio smjer, na osnovu čega se može zaključiti da smo na drugom grafiku imali negativne sopstvene vrijednosti. Na zadnjem grafiku vidimo zelenu tačku u koordinatnom početku, što nam sugeriše da su sopstvene vrijednosti jednake nuli, što dovodi do pojave nultog sopstvenog vektora i neinvertibilnosti.

Za neki skalar  $\lambda$  možemo reći da je sopstvena vrijednost ako ispunjava uslov:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.6)$$

ova jednačina se naziva karakterističnom jednačinom. Uslov da determinanta bude nula dolazi iz činjenice da se tada radi o neinvertibilnim matricama, što nam znači da u tom slučaju imamo neki nenulti sopstveni vektor  $\mathbf{u}$  za koji važi relacija 3.5. Dakle, sopstvene vrijednosti se nalaze rješavanjem karakteristične jednačine, a sopstveni vektor je odgovarajući nenulti vektor koji zadovoljava pomenutu relaciju.

Naime, cilj je da se obezbijedi matrica sa svim sopstvenim vrijednostima različitim od nule kako bi smatrali da je matrica (susjedstva) modifikovana i “spremna” za dalju analizu.

Osobine koje matrica susjedstva treba da ima, kako bi je smatrali “spremnom” za dalju analizu (npr. Furijeovu) su invertabilnost, odnosno nesingularnost i dijagonalizabilnost. Matrica će biti singularna (neinvertibilna) ukoliko je njena determinanta jednaka nuli [33], a determinanta će uvijek biti nula ukoliko je makar jedna sopstvena vrijednost jednaka nuli, jer se ona može računati kao proizvod sopstvenih vrijednosti.

Do nedijagonalizabilnosti dovode sopstveni vektori. U slučaju kada imamo nedijagonalizabilnu matricu znamo da je došlo do smanjivanja ranga. A do smanjivanja ranga dolazi kada imamo nedovoljan broj linearno nezavisnih sopstvenih vektora [33].

**Napomena:** O svim ovim pojmovima će više riječi biti u narednim poglavljima.

Sa stanovišta obrade signala na grafovima, odnosno matrice susjedstva koje se koriste za reprezentaciju grafova, singularnost i nedijagonalizabilnost predstavljaju veliki problem u analizi jer se ne dobijaju standardni i očekivani oblici koje možemo analizirati. Pretpostavimo da se koristi Furijeova transformacija, ono što očekujemo od njenog izlaza su neke dominantne frekvencije, amplitude, određeni raspored frekvencija koji podsjeća na sinusoidu, što nam zbog njenih osobina znatno olakšava analizu. U slučajevima singularnih i nedijagonalizabilnih matrica susjedstva dobijamo spektar koji je izuzetno teško analizirati. Cilj ovog istraživanja je prevazilaženje ovog problema.

## Glava 4

# Furijeova transformacija

Furijeova transformacija je matematički alat koji pretvara signale iz vremenskog ili prostornog domena u frekvencijski domen, omogućavajući detaljnu analizu i obradu signala. Ona danas ima širok spektar upotrebe i predstavlja jedan od najčešćih alata za analizu signala u inženjeringu, fizici i obradi signala. Da bi Furijeova transformacija bila primjenjiva, signal mora biti integrabilan na cijelom svom domenu. Matematički uslov za integrabilnost funkcije  $f(t)$  je dat sljedećom formulom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (4.1)$$

Furijeova transformacija signala  $f(t)$  je definisana kao:

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.2)$$

gdje je:

- $F(\omega)$  je Furijeova transformacija signala  $f(t)$
- $t$  vremenska komponenta
- $\omega$  ugaona frekvencija
- $j$  imaginarna jedinica ( $j = \sqrt{-1}$ )

## 4.1 Diskretna Furijeova transformacija

Kada govorimo o obradi signala na grafovima najčešće se pomisli na diskretnu Furijeovu transformaciju (DFT). DFT se koristi za transformaciju sekvence diskretnih uzoraka iz vremenskog u frekvencijski domen, što je čini veoma korisnim alatom za analizu frekvencijskog sadržaja diskretnih signala. Matematički, DFT je definisana za sekvencu od  $N$  uzoraka i izražena je na sljedeći način:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.3)$$

- $X(k)$  koeficijent diskretne Furijeove transformacije na frekvenciji  $k$
- $x[n]$  vrijednosti ulaznog signala (diskretne funkcije)
- $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$  je kompleksna eksponencijalna funkcija koja predstavlja bazne funkcije diskretne Furijeove transformacije (DFT)
- $N$  ukupan broj uzoraka
- $k$  indeks frekvencije ( $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ )

Diskretna Furijeova transformacija je osnovni alat u digitalnoj obradi signala, jer omogućava efikasno istraživanje frekvencijskog sadržaja i karakteristika digitalnih signala.

## 4.2 Furijeova transformacija na neorijentisanim grafovima

U ovoj sekciji će, ukratko, biti objašnjeno zbog čega je Furijeova transformacija na neorijentisanim grafovima moguća bez prethodnih manipulacija sa matricom susjedstva.

Furijeova transformacija signala definisanih na grafu se određuje matematičkom jednačinom:

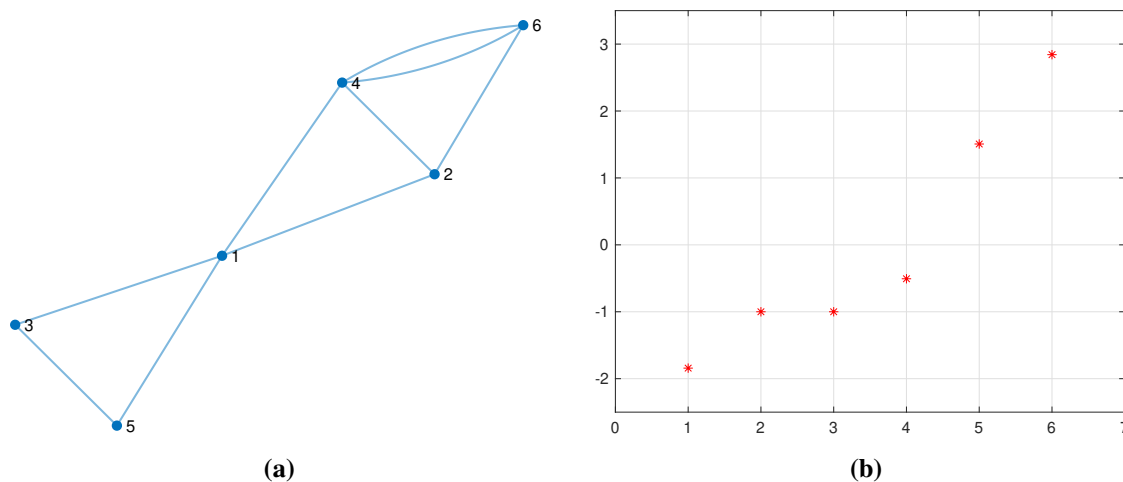
$$X = U^{-1} \cdot x \quad (4.4)$$

gdje je  $X$  vektor koeficijenata Furijeova transformacija signala  $x$  definisanog na grafu, a  $U$  je matrica u čijim se kolonama nalaze vrijednosti sopstvenih vektora, određenih na osnovu matrice susjedstva  $A$  [19].

Zbog čega je Furijeova transformacija kod neorijentisanih grafova, u većini slučajeva, izvodljiva bez manjih ili većih modifikacija matrice susjedstva? Da bi FT bila moguća, potrebno je da matrica bude dijagonalizabilna i nesingularna. O ovome će više riječi biti u sekciji 5. Sada je važno reći na koji način možemo utvrditi da li je matrica dijagonalizabilna i nesingularna kako bi pokazali da je FT moguće obaviti direktno, koristeći originalnu matricu susjedstva. Kada je riječ o nesingularnosti, za matricu možemo reći da je nesingularna ukoliko je njena determinanta različita od nule. Dijagonalizabilnost je određena sopstvenim vektorima. Ukoliko su svi sopstveni vektori linearno nezavisni, tada za matricu možemo reći da je dijagonalizabilna.

Uzećemo primjer grafa čija je matrica susjedstva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



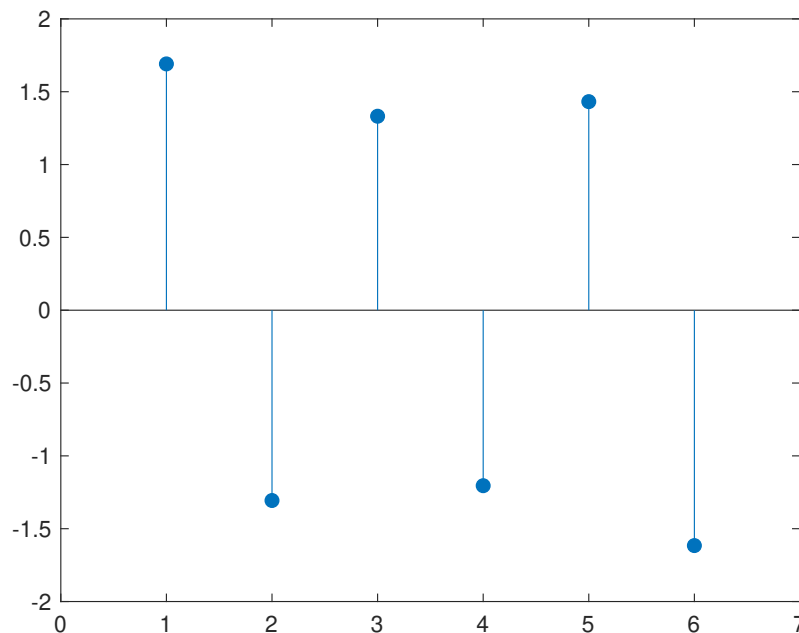
**Slika 4.1:** (a) Neorijentisani graf čija je matrica susjedstva  $A$ . (b) Sopstvene vrijednosti.

Kao što već znamo, nijedan neorijentisani graf nema izvore ili ponore, samim tim svi neorijentisani grafovi su nesingularni. *Kako je samo par rečenica iznad rečeno da se (ne)singularnost određuje na osnovu determinante, a sada se pominju izvori i ponori sa*

*istim ciljem?* Naime, prisustvo izvora i ponora znači da ćemo u matrici susjedstva u tom redu (koloni) imati sve nule, što može biti indicacija da ćemo dobiti nultu determinantu. Kako, kao što je već rečeno, neorijentisani grafovi nemaju izvore ili ponore, može se, sa velikom vjerovatnoćom, pretpostaviti da je matrica susjedstva nesingularna.

Sa druge strane, dijagonalizabilnost je neophodno provjeriti. Međutim, kao što se može vidjeti sa slike 4.1b ovaj graf nema sopstvenih vrijednosti jednakih nuli, čime je obezbijeđena Furijeova transformacija datog signala definisanog na grafu, čija je matrica susjedstva  $A$ .

Furijeova transformacija matrice susjedstva  $A$  i nasumično generisanog signala je prikazana na slici ispod.



**Slika 4.2:** Furijeova transformacija neorijentisanog grafa.

Kako neorijentisani grafovi nijesu glavna tema ovog rada, samo ćemo se kratko osvrnuti na analizu Furijeove transformacije neorijentisanog grafa prikazanog na slici 4.2. Kao što je i očekivano, broj pikova je 6, što se poklapa sa brojem čvorova grafa. Naizmjenični raspored pikova, prvo se javlja pozitivni, a zatim negativni, sugeriše da se radi o sinusoidalnom signalu. Ova karakteristika značajno olakšava analizu signala, jer nam omogućava da predvidimo njegove frekvencijske komponente.

### 4.3 Furijeova transformacija na orijentisanim grafovima

Za razliku od neorijentisanih grafova, za orijentisani ne možemo tvrditi da su nesingularni, naprotiv, u većini slučajeva to nijesu. Takođe, dijagonalizabilnost je upitna kada je riječ o orijentisanim grafovima. Neophodno je napomenuti da će sve ovo detaljnije biti objašnjeno (dijagonalizabilnost i nesingularnost) u sekciji 5, konkretno potpoglavlje 5.1.

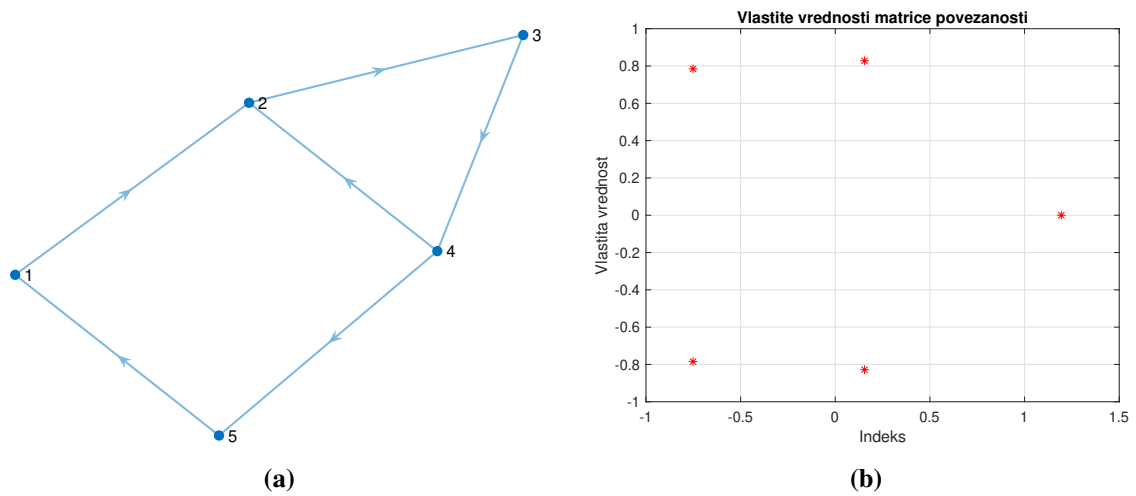
Matematička formula za određivanje Furijeove transformacije kod neorijentisanih i orijentisanih grafova je ista (4.4). Međutim, kako orijentisani grafovi u većini slučajeva nijesu dijagonalizabilni, već moramo doći do takvog oblika matrice susjedstva, formula koja se često koristi za Furijeovu transformaciju signala definisanih na grafovima je:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)u_k(n) \quad (4.5)$$

Iz date formule se zaključuje da Furijeova transformacija grafa  $X(k)$  predstavlja projekciju signala  $x(n)$  na  $k$ -ti sopstveni vektor matrice susjedstva (ili druge odgovarajuće matrice) grafa. Tačnije, Furijeova transformacija (orijentisanog) grafa može se tumačiti kao skup projekcija signala na sopstvene vektore  $u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)$  [19].

Kao i u prethodnom poglavlju, i sada ćemo proći kroz jedan jednostavan, pokazni, primjer orijentisanog grafa. Ručno je odabrana matrica susjedstva, kako bi Furijeova transformacija bila izvodljiva. Tačnije, matrica će biti dijagonalizabilna i nesingularna.

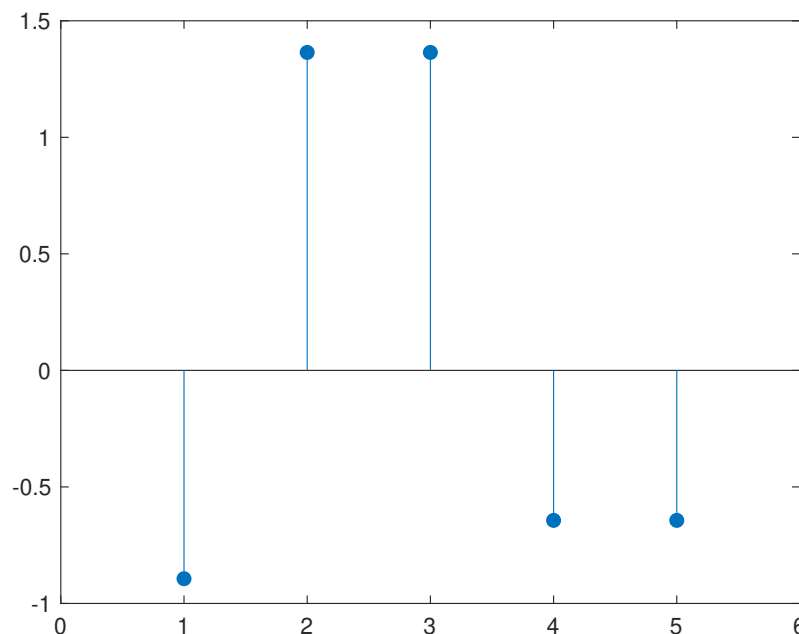
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**Slika 4.3:** (a) Orijentisani graf čija je matrica susjedstva  $A$ . (b) Sopstvene vrijednosti.

Kao što se može uočiti sa slike 4.3a graf nema izvora i ponora, što bi značilo da je naša matrica susjedstva nesingularna. Takođe, znamo da se radi o dijagonalizabilnoj matrici jer nijedna sopstvena vrijednost nije jednaka nuli, što možemo vidjeti na slici 4.3b.

Na slici ispod je prikazana Furijeova transformacija matrice susjedstva  $A$  i nasumično generisanog signala.



**Slika 4.4:** Furijeova transformacija orijentisanog grafa.

Graf Furijeove transformacije prikazan na slici 4.4 ima 5 pikova, što je očekivano s

obzirom na to da graf ima 5 čvorova. Ovi pikovi su raspoređeni tako da podsjećaju na sinusoidu, što olakšava analizu jer sinusoidalni signali imaju jasno određene frekvencije i amplitude, što ih čini pogodnim za preciznu matematičku analizu. Pikovi predstavljaju dominantne frekvencije u signalu. Možemo vidjeti da, u ovom primjeru, one imaju vrijednosti koje se približno kreću oko  $-1$ ,  $1.5$  i  $-0.5$ . Još jeda od karakteristika ovog signala i njegove Furijeove transformacije je raspodjela pikova u odnosu na  $x - osu$ . Može se uočiti da su oni simetrični u odnosu na nulu, što je tipično za Furijeove transformacije realnih signala.

# Glava 5

## Predloženo rješenje

Cilj ovog istraživanja je obezbjeđivanje analize signala definisanih na orijentisanim grafovima koristeći Furijeovu transformaciju u obliku koji je poznat i razumljiv. Predložena metoda je omogućila zadati cilj određenim modifikacijama nad matricom susjedstva. Naravno, jedina težnja ovog istraživanja se nije odnosila na obezbjeđivanje analize koristeći Furijeovu transformaciju, već i da predložena metoda unosi minimalne izmjene u originalnom grafu, tačnije originalnoj matrici susjedstva, kako bi analiza bila što vjerodostojnija. Prevelike izmjene i odstupanje od originalnih vrijednosti bi dovele do neodgovarajuće analize, odnosno do analize za koju ne možemo smatrati da bi dala iste ili slične rezultate kao i originalni graf (graf prije izmjena).

Svi aspekti predložene metode će biti objašnjeni u ovom poglavlju, počevši od utvrdjivanja da li je matrici neophodna modifikacija, do uzroka koji dovode do nemogućnosti primjene Furijeove transformacije i samog rješenja problema. Dato rješenje je implementirano i testirano u MATLAB programskom okruženju, na osnovu kojeg smo došli do rezultata koji će biti prikazani, i zaključka da predložena metoda daje željene rezultate, tačnije ispunjava početnu hipotezu. Početna hipoteza je bila da će dodavanjem grana male težine na mjestima koja dovode do smanjenja ranga (više o tome u nastavku ovog poglavlja), obezbijediti puni rang, determinantu koja je različita od nule i adekvatnu analizu koristeći Furijeovu transformaciju.

## 5.1 Singularne i nedijagonalizabilne matrice

Singularne matrice su matrice čija je determinanta jednaka nuli, i za njih možemo reći da nijesu invertibilne [34], niti regularne matrice [35]. Invertibilne matrice su matrice za koje možemo naći njihov inverzni parnjak. Tačnije, to su matrice koje ispunjavaju uslov:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

gdje je  $I$  jedinična matrica (matrica koja na glavnoj dijagonali ima jedinice, a na svim ostalim mjestima nule).

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Kod singularnih matrica, pored nulte determinante, još jedno svojstvo se odnosi na rang matrice, a ono podrazumijeva da rang nije pun. Ukoliko imamo matricu  $n \times n$ , puni rang matrice bi bio  $n$ . Kod singularnih matrica on će biti  $n - x$ , gdje je  $x$  broj linearno zavisnih redova ili kolona.

Naš cilj je, kako bi obezbijedili invertibilnost (nesingularnost), da utvrdimo koje grane (čvorovi) su odgovorne za smanjenje ranga matrice, samim tim i nultu determinantu, i na tim mjestima napravimo određene modifikacije.

Dijagonalizabilna matrica je matrica koja ima bazu sopstvenih vektora. Dijagonalni elementi matrice su odgovarajuće sopstvene vrijednosti [36].

Uslov dijagonalizabilnosti matrice  $A$  je:

$$A = SDS^{-1}$$

gdje je  $S$  matrica čije kolone čine sopstveni vektori matrice  $A$ , a  $D$  je dijagonalizabilna matrica čiji dijagonalni elementi predstavljaju sopstvene vrijednosti.

Ako su sve vrijednosti na glavnoj dijagonali međusobno različite i različite od nule za takvu matricu možemo odmah tvrditi da je dijagonalizabilna. Isto tako, ukoliko se radi o simetričnim matricama ( $A = A^T$ ), možemo odmah reći da je u pitanju dijagonalizabilna matrica. Matricu  $A$  dimenzija  $n \times n$  smatramo dijagonalizabilnom ukoliko ima  $n$  linearno nezavisnih sopstvenih vektora, tačnije, imamo puni rang matrice.

Postoje mnogi načini kako da nedijagonalizabilnu matricu dovedemo do dijagonalizabilne forme, o čemu je, između ostalih, pisano u radovima [2, 36].

Važno je još ponoviti da nedijagonalizabilne i singularne matrice imaju nultu determinantu i smanjeni rang matrice. Dakle, provjerom determinante i ranga matrice možemo utvrditi da li je ona singularna ili nesingularna i da li jeste ili nije dijagonalizabilna.

## 5.2 Jordanovi blokovi

Na samom početku ove sekcije ćemo objasniti šta je Jordanova normalna forma (JNF) i kako je ona povezana sa matricom susjedstva. Naime, Jordanova normalna forma predstavlja specifičan oblik matrice koja se dobija transformacijom:

$$A = VJV^{-1} \quad (5.1)$$

gdje je:

- $A$  je matrica susjedstva
- $V$  je matrica čije kolone služe kao baza generalizovanih sopstvenih vektora matrice susjedstva  $A$
- $J$  je Jordanova normalna forma matrice susjedstva  $A$  koja sadrži Jordanove blokove

*Zbog čega je ovo važno?* Kako je već rečeno, matrice susjedstva orijentisanih grafova često nijesu dijagonalizabilne. Naš cilj je da ih dovedemo u oblik koji olakšava analizu, odnosno omogućava spektralnu i frekvencijsku analizu uz pomoć Furijeove transformacije [37, 38].

Prisustvo Jordanovih blokova sugerše postojanost nedijagonalizabilne matrice. Dakle, naš cilj je razbijanje Jordanovih blokova. Jordanovi blokovi su kvadratne matrice [39] oblika:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Jordanova normalna forma bi bila blok matrica na čijoj glavnoj dijagonali se nalaze Jordanovi blokovi.

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\lambda_3) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{k_4}(\lambda_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Za obje matrice važi da su  $\lambda_k$ , odnosno,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sopstvene vrijednosti matrice susjedstva  $A$ , dok su  $J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \dots, J_{k_r}(\lambda_r)$  Jordanovi blokovi kojima su pridružene sopstvene vrijednosti. Kao što znamo, prisustvo sopstvenih vrijednosti na glavnoj dijagonali dovode do nulte determinante, što nam je još jedan od pokazatelja da se matrica susjedstva ne može dijagonalizovati. Kako bi prevazišli ovaj problem, naš cilj je razbijanje Jordanovih blokova [38].

### 5.2.1 Eliminacija Jordanovih blokova

Kao što je već rečeno, potrebno je eliminisati Jordanove blokove koji sadrže nultu sopstvenu vrijednost kako bi dobili poželjan oblik matrice susjedstva (bez nula na glavnoj dijagonali). Neke od, do sada, istraženih metoda su opisane u poglavlju 1 (“Uvod i prethodna istraživanja”).

Eliminacija Jordanovih blokova se postiže, manjim ili većim, modifikacijama nad matricom susjedstva. Očigledno je da, radi vjerodostojne analize signala nakon modifikacije, te izmjene treba da budu što manje i suptilnije. Svaka veća izmjena bi mogla promijeniti graf i signale do te mjere da za analizu ne bi mogli tvrditi da je tačna i da dobro interpretira originalni signal i strukturu matrice susjedstva, odnosno grafa. Kako bi izbjegli ovo, trebalo bi se truditi da predložene modifikacije budu takve, da ne mijenjaju strukturu grafa ili da to čine sa minimalnim posljedicama.

Postoje tri grupe načina na koji se mogu vršiti modifikacije. Prva je uklanjanje grana iz grafa, druga je mijenjanje težina grafa i treća je dodavanje grana u grafu. Metod predložen u ovom radu se svrstava u treću grupu. Jasno je da je najproblematičnija prva grupa, jer uklanjanjem grana iz grafa uklanjamo i određene informacije. Te informacije mogu nositi šum ili informacije koje nam nijesu od prevelikog značaja za analizu, ali isto tako mogu nositi i mnogo važnih informacija. Kako je veoma teško, možda i nemoguće, sa

sigurnošću tvrditi koja grana nosi koju informaciju i od koje je ona važnosti, ovaj tip modifikacija je odmah uklonjen iz razmatranja. Mijenjanje težina granama grafa može imati iste posljedice kao i uklanjanje grana, u manjoj mjeri, ali potencijalno opet gubimo informacije i dobijamo nevjerodostojnu analizu. Iz ovih razloga odlučeno je da se rješenje nedijagonalizabilne matrice potraži u dodavanju grana.

Naime, glavna ideja se sastoji u tome da iz Jordanovog bloka oblika:

$$J(\lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdje su prisutne nulte sopstvene vrijednosti dobijemo matricu gdje će, na tim mjestima, nakon modifikacije biti sopstvene vrijednosti različite od nule. Tačnije, da ona ima oblik:

$$J_{\text{modifikovano}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_5 \end{bmatrix}$$

Prvo se primjećuje da su originalne sopstvene vrijednosti promijenile vrijednost za  $\varepsilon$ , odnosno da su sada različite od nule. Veličina odstupanja modifikovane, u odnosu na originalnu sopstvenu vrijednost, zavisi od metode koja se koristi. U svakom slučaju, cilj je da ta vrijednost bude što manja, gotovo zanemarljiva. Može se desiti da se u skupu novih sopstvenih vrijednosti pojave dvije ili više identičnih vrijednosti. Ako geometrijska višestrukost ponovljenih vrijednosti nije jednaka algebarskoj, pojaviće se novi Jordanovi blokovi (smanjenih dimenzija).

Način na koji smo mi uspješni da riješimo ovaj problem, razbijemo Jordanove blokove i dobijemo dijagonalnu matricu susjedstva, i obezbijedimo jednostavnu analizu primjenom Furijeove transformacije, je dodavanjem grana. Na koji način i na kojim mjestima u grafu su te grane dodavane, će biti objašnjeno u narednoj sekciji.

### 5.3 Metoda i podaci

Početna ideja prevazilaženja problema pomenutih u prethodnim sekcijama ovog poglavlja je bila dodavanje grana. Već je pomenuto zbog čega baš dodavanje grana, a ne uklanjanje ili modifikacija postojećih. Međutim, opet treba naglasiti da metod dodavanja grana unosi najmanje izmjene u originalni graf, što je, takođe, bio cilj ovog istraživanja.

Prvo pitanje koje je potrebno postaviti je: *Na koji način utvrditi da li je neophodna modifikacija matrice susjedstva?* Postoje dva načina utvrđivanja da li je nad matricom susjedstva potrebna modifikacija kako bi došli do cilja, odnosno do moguće analize uz pomoć Furijeove transformacije.

Prvi način je određivanje determinante. Determinanta postoji samo za kvadratne matrice (matrice dimenzija  $n \times n$ ) i ona predstavlja skalar koji daje važne informacije o svojstvima matrice, kao što je invertibilnost [34, 40]. Postoji više načina numeričkog računanja determinante matrice (u zavisnosti od njenih dimenzija), ovo se može pogledati u radovima [40, 41]. Kako smo mi za provjere i implementaciju algoritma koristili MATLAB, tako smo i determinante računali koristeći ugrađenu funkciju:

$$\det(A)$$

gdje je  $A$  matrica susjedsta. Ukoliko dobijemo vrijednost determinante jednaku nuli, dolazi do modifikacije matrice susjedstva, u suprotnom se, u nekim slučajevima, može direktno izvesti analiza uz pomoć Furijeove transformacije.

Drugi način je određivanje ranga matrice. Rang je broj linearno nezavisnih redova (kolona) u matrici [42]. Ukoliko su svi redovi (kolone) linearno nezavisni, imamo puni rang matrice. To bi značilo da, ukoliko imamo matricu dimenzija  $n \times n$ , i postoji  $n$  linearno nezavisnih redova (kolona) imamo puni rang matrice, odnosno rang koji je jednak  $n$ . Kao i kod determinante, postoji više načina za određivanje ranga matrice, što se može pogledati u radovima [42, 43]. Provjeravanje uspješnosti algoritma je vršeno u MATLAB-u, samim tim je, za određivanje ranga matrice, korištena ugrađena funkcija:

$$\text{rank}(A)$$

gdje  $A$  predstavlja matricu susjedsta. Ukoliko matrica nema puni rang, znači da nije invertibilna, odnosno ona je singularna. Već je napomenuto da je to problem, jer se Furijeova transformacija ne može vršiti nad singularnim matricama. Ovo bi značilo da, ukoliko utvrdimo da je broj linearno nezavisnih redova (kolona) manji od ukupnog broja redova

(kolona), tačnije da rang nije potpun, neophodno je izvršiti modifikacije nad matricom susjedstva kako bi Furijeova transformacija bila moguća.

U ovom algoritmu determinanta je bila “okidač” za modifikaciju, a rang je korišten za internu provjeru validnosti algoritma, odnosno provjeru da li se nakon modifikacije povećao rang matrice do potpune vrijednosti.

Još jedno pitanje koje bi trebalo postaviti je: *Na koji način odrediti gdje je potrebno dodati granu?* Upravo ovo pitanje je ključna tačka ovog istraživanja. Lako je doći do zaključka da li je modifikacija potrebna ili nije, kao što je već rečeno, uz jednostavno određivanje determinante ili ranga matrice. Međutim, izazov predstavlja određivanje čvorova koje treba spojiti kako bi se prevazišao ovaj problem (nemogućnosti izvođenja Furijeove transformacije usljed postojanja Jordanovih blokova).

Naime, naš cilj je da odredimo linearno zavisne redove i kolone, koliko ih ima i koji su. Broj linearno zavisnih redova i kolona predstavlja broj za koji je smanjen rank matrice. Tačnije ukoliko imamo matricu  $n \times n$  i njen rang matrice je  $n - x$ ,  $x$  predstavlja broj linearno zavisnih redova i kolona, tačnije ukupan broj redova i kolona koji smanjuju rang i dovode do formiranja singularne matrice i nemogućnosti izvođenja Furijeove transformacije. Nakon što utvrdimo broj linearno zavisnih redova (kolona) i odredimo koji su to redovi (kolone), spajamo ih, dodajući nove grane od čvora koji je identifikovan kao linearno zavisna kolona, ka čvoru koji je identifikovan kao linearno zavistan red. Na ovaj način se izbjegava stvaranje izvora i ponora.

Određivanje linearno nezavisnih, odnosno zavisnih redova (kolona) ukoliko postoje, se najčešće vrši Gausovom eliminacijom. Detaljan postupak numeričkog određivanja Gausove eliminacije se može naći u radu [32]. Sam princip se sastoji od određivanja redno-redukovanog ešalonskog oblika i identifikacije indeksa pivot redova, zatim se izvrši transponovanje matrice susjedstva i ponovi se isti postupak za određivanje kolono-redukovanog ešalonskog oblika i identifikaciju indeksa pivot kolona. Postoje tri uslova koji moraju biti ispunjeni da bi za matricu mogli reći da ima ešalonski oblik, a ukoliko ispunjava još dva dodatna tada se radi o redukovanom ešalonskom obliku matrice [32]. Uslovi za ešalonski oblik matrice su:

1. Svi nulti redovi (redovi sa svim nulama) nalaze se na dnu matrice.
2. Prvi nenulti element (vodeći element - pivot) u trenutnom redu (recimo red  $i$ ) treba da bude u koloni koja dolazi poslije kolone vodećeg elementa u prethodnom redu (red  $i - 1$ ).

3. Svi unosi u koloni ispod vodećeg elementa (pivota) su nulti

Ako su ova tri uslova ispunjena imamo ešalonski oblik matrice, a da bi dobili redukovani ešalonski oblik potrebno je da budu ispunjena još dva uslova, a to su:

1. Vodeći element (pivot) u svakom nenultom redu mora biti 1.
2. Svaki vodeći element (pivot) je jedini nenulti element u svojoj koloni.

Osvrnimo se malo na određene pojmove iz navedenih uslova. Pivot predstavlja prvi nenulti element u redu, odnosno koloni ukoliko se radi o transponovanoj matrici. Redovi (kolone) koje imaju pivot elemente na određenim pozicijama su linearno nezavisne, što znači da se nijedan od ovih redova (kolona) ne može izraziti kao linearna kombinacija drugih redova (ili kolona). Oni dovode do povećavanja ranga matrice. Linearno zavisni redovi (kolone) su oni koji nemaju pivot elemente, odnosno svi elementi u redu (koloni) su nula. Kao što je već napomenuto, ovi linearno zavisni redovi (kolone) dovode do smanjivanja ranga matrice.

Dakle, nakon što se odrede pivot elementi redova (kolona), lako je odrediti linearno zavisne elemente redova (kolona). Nakon ovoga dolazimo do posljednjeg koraka u modifikaciji matrice susjedstva, a to je dodavanje grana sa određenom težinom između linearno zavisnih redova i kolona. Smjer kretanja je od čvora koji predstavlja linearno zavisnu kolonu, ka čvoru koji predstavlja linearon zavisni red.

Cijeli proces pronalaženja pivot redova (kolona), a zatim nelinearno zavisnih redva (kolona), je u MATLAB-u urađeno koristeći ugrađene funkcije:

$$[B, row] = rref(A)$$

gdje je  $A$  matrica susjedstva, a funkcija  $rref$  pronalazi pivot redove. Promjenjiva  $B$  je matrica u kojoj se upisuju sve potrebne promjene kako bi se došlo do elemenata u redovima koji su pivoti, koji se zatim pamte u promjenjivoj  $row$ . Pivot kolone se određuju tako što se matrica susjedstva transponuje.

$$[B, col] = rref(A^T)$$

Princip je isti kao kod traženja pivot redova, s tim što treba napomenuti da se matrica  $B$  nigdje prije ovoga nije inicijalizovala, tako da je ona prazna u momentu prije nego što funkcija počne sa traženjem pivot kolona. U njoj se, nanovo, upisuju sve potrebne

promjene kako bi se našli pivot elementi u kolonama, koje se zatim pamte u promjenjivoj  $col$ .

Nakon pronalaska linearno nezavisnih redova i kolona i pivot elemenata u njima, treba pronaći linearno zavisne redove i kolone. Ovo se u MATLAB-u može uraditi korištenjem ugrađene funkcije:

$$row_{ind} = setdiff(1 : n, row)$$

$$col_{ind} = setdiff(1 : n, col)$$

gdje se u promjenjivoj  $row_{ind}$  upisuju linearno zavisni redovi, a u  $col_{ind}$  linearno zavisne kolone. Naime, ova funkcija prolazi kroz sve redove (kolone) od prvog do  $n - tog$  (posljednjeg) i provjerava da li je on upisan u promjenjivoj  $row$  ( $col$ ). Ukoliko nije upisan znači da je taj red (kolona) linearno zavisna i da on dovodi do smanjivanja ranga matrice, samim tim da se na tom mjestu treba vršiti modifikacija. Indeksi redova (kolona) koji su upisani u promjenjivoj  $row$  ( $col$ ) su linearno zavisni i njih ne treba korigovati.

Na primjer matrica susjedstva:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ima redukovani oblik matrice za određivanje pivot redova oblika:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iako bi na prvi pogled mogli reći da svi redovi imaju jedan nenulti element i da su samim tim svi linearno nezavisni, odnosno da nema redova koji dovode do smanjivanja ranga matrice, to nije tačno. Linearno nezavisni redovi su 1, 3 i 4. *Zbog čega red 2 nije linearno nezavisan, zbog čega za njega ne možemo reći da ima pivot element, kada ima nenultu vrijednost 1 u drugom redu?* Odgovor na ovo pitanje se nalazi u uslovima za ešalonsku formu i redukovanu ešalonsku formu napisanim ranije u ovom poglavlju. Pravilo uslova za ešalonsku formu matrice kaže da prvi nenulti element (pivot) u trenutnom redu treba da bude u koloni koja dolazi nakon kolone vodećeg elementa (pivota) u prethodnom redu, tačnije svi pivoti se nalaze na “dijagonalnim” pozicijama ili ispod njih, a sve druge

vrijednosti iznad pivotu se eliminišu. Ovo bi značilo da, ukoliko se trenutno nalazimo u drugom redu, prvi nenulti element mora biti u drugoj koloni da bi se smatrao pivotom, pod uslovom da se u prvom redu pivot nalazi na poziciji  $[1, 1]$ , tačnije u prvom redu prve kolone. Kako je u našem slučaju pivot u prvom redu na poziciji  $[1, 1]$ , jedina pozicija na kojoj se prvi nenulti element ne smije nalaziti je  $[1, 2]$ , tačnije prvi red i druga kolona, što je slučaj u ovom primjeru. Dakle, nakon ovoga možemo zaključiti da je drugi red linearno zavisna i da dovodi do smanjivanja ranga matrice. Dakle, linearno zavistan red je drugi jer su u njemu, u matrici  $B$ , svi elementi nula.

Redukovani oblik matrice  $A$  za određivanje pivot kolona je:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo da u prve tri kolone postoje nenulti elementi (pivot elementi), što znači da su kolone 1, 2 i 3 linearno nezavisni. Linearno zavisna kolona je četvrta jer su u njoj, u matrici  $B$ , svi elementi nula.

Sada bi se na poziciji  $[2, 4]$  dodala grana sa određenom težinom. Što nas dovodi do pitanja: *Na koji način odrediti težinu dodatih grana?* Naime, ovaj segment može biti dio nekog novog istraživanja, u ovom je određivana eksperimentalnim putem. Vrijednost smo mijenjali na osnovu grafika sopstvenih vrijednosti. Cilj je bio da one budu raspoređene što je bliže jediničnoj kružnici, jer je ona pokazatelj stabilnosti sistema [33]. Pored sopstvenih vrijednosti, kao mjeru kvaliteta smo koristili SNR, pa smo posmatrali kako se on mijenja i za koje vrijednosti unosi male promjene.

Nakon što je matrica modifikovana vršena je provjera uspješnosti algoritma računanjem determinante i ranga matrice. Ukoliko se dobije determinanta koja je različita od nule i puni rang matrice, znači da je algoritam, odnosno predložena metoda, uspješan, što je i bio slučaj.

Radi bolje preglednosti i razumijevanja algoritma na narednoj strani je dat pseudokod predložene metode.

**Algorithm 1** Pseudokod predložene metode

Postavi broj čvorova  $n$  i ivica  $k$

Generiši nasumičnu  $n \times n$  matricu  $A$  sa elementima 0 ili 1 koja ima tačno  $k$  jedinica van glavne dijagonale a sve dijagonalne elemente jednake nuli.

**if**  $\det(A) = 0$  **then**

    Kreiraj orijentisani graf  $g$  iz matrice  $A$

    Izračunaj sopstvene vrijednosti  $sv$  matrice  $A$

    Transformiši  $A$  u redno-redukovani ešalonski oblik i identifikuj indekse pivot redova

    Transformiši  $A$  u kolono-redukovani ešalonski oblik i identifikuj indekse pivot kolona

    Pronađi redove i kolone koje nijesu pivotirani (zavisne elemente)

    Kreiraj matricu  $B$  kao kopiju matrice  $A$

**for** svaki  $i$  u redovima koji nijesu pivotirani **do**

**for** svaki  $j$  u kolonama koje nijesu pivotirane **do**

$B(i, j) \leftarrow 0.1$

**end for**

**end for**

    Izračunaj determinantu  $\det(B)$

    Kreiraj orijentisani graf  $g_1$  iz matrice  $B$

    Izračunaj sopstvene vrijednosti  $sv$  matrice  $B$

    Generiši slučajan signal  $s$

    Izračunaj Furijerovu transformaciju za matricu  $A$ :  $FT_A \leftarrow V_A^T \cdot s$ , gdje je  $V_A$  matrica sopstvenih vektora matrice  $A$

    Prikaži Furijerovu transformaciju  $FT_A$

    Izračunaj Furijerovu transformaciju za matricu  $B$ :  $FT_B \leftarrow V_B^T \cdot s$ , gdje je  $V_B$  matrica sopstvenih vektora matrice  $B$

    Prikaži Furijerovu transformaciju  $FT_B$

**else**

    Prekini algoritam

**end if**

Na kraju, tokom čitavog rada fokus je bio na prve dvije hipoteze iz uvodnog dijela, tačnije da se umetanjem grana sa malim težinama dobija sistem koji se ne razlikuje u veličkoj mjeri od originalnog i obezbjeđuje se mogućnost korištenja Furijeove transformacije. Međutim, postavljena je još jedna hipoteza, a to je da se dodavanjem čvorova duž dodatih grana obezbjeđuje mogućnost dobijanja identičnog izlaza signala na modifikovanom i originalnom grafu. *Zbog čega se tek sada osvrćemo na ovu hipotezu?* Princip i predložena metoda, način određivanja da li je modifikacija potrebna, je identičan. Jedina razlika je u tome što umjesto spajanja dva čvora granom, na toj grani umećemo čvorove i, samim tim, povećavamo dimenzije modifikovane matrice susjedstva. Kako se modifikovana matrica susjedstva povećava, dimenzije signala se takođe moraju modifikovati, dodavanjem nula. I ovaj princip je predstavljen pseudokodom u nastavku kako bi se bolje razumio, s tim što je predstavljen samo dio koji se razlikuje.

---

**Algorithm 2** Pseudokod za umetanje čvorova duž dodatih grana
 

---

Pronađi linearno zavisne elemente matrice susjedstva  $A$   $row\_ind, col\_ind$ )

Kreiraj matricu  $B$  kao kopiju matrice  $A$  i postavi broj\_čvorova kao broj redova (kolona) matrice  $A$ .

**for** svaki  $i$  od 1 do  $\min(\text{length}(row\_ind), \text{length}(col\_ind))$  **do**

Postavi prethodni\_čvor na  $col\_ind(i)$

**for** svaki  $j$  od 1 do broj\_dodatih\_čvorova **do**

Povećaj broj čvorova: broj\_čvorova  $\leftarrow$  broj\_čvorova + 1

Dodaj novu granu između prethodnog i novog čvora. Postavi:

$B(\text{prethodni\_čvor}, \text{broj\_čvorova}) \leftarrow$  težina

Ažuriraj prethodni čvor: prethodni\_čvor  $\leftarrow$  broj\_čvorova

**end for**

Poveži posljednji dodati čvor sa krajnjim čvorom. Postavi:

$B(\text{prethodni\_čvor}, row\_ind(i)) \leftarrow$  težina

**end for**

Proširi matricu  $A$  i signal Temp na dimenzije matrice  $B$  dodajući nule.

---

Što se tiče podataka korištenih za provjeru rada algoritma, u početku, tačnije dok nije potvrđena početna hipoteza, su korištene nasumično generisane kvadratne matrice. Primjer koji će biti prikazan u nastavku je generisan koristeći set podataka “USA Temperature Map”.

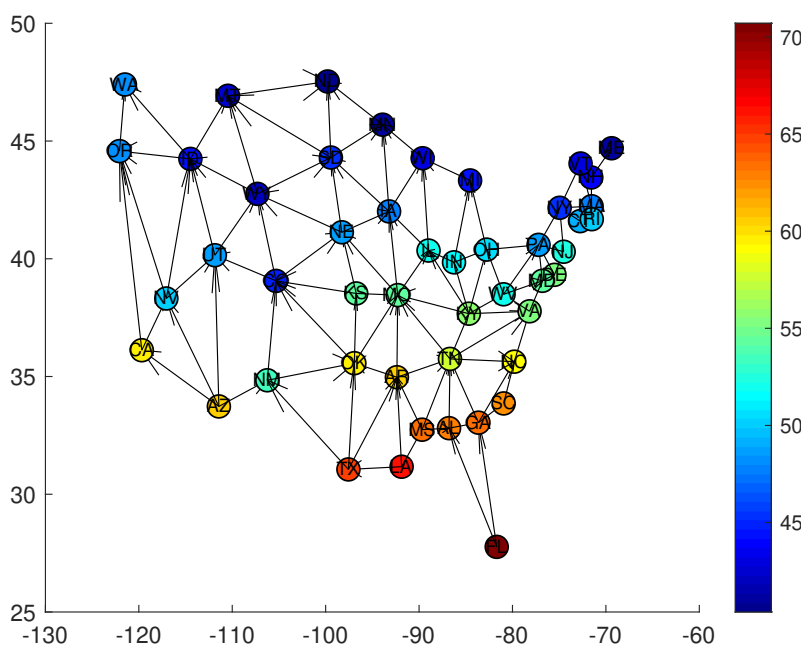
## 5.4 Primjer i analiza dobijenih rezultata

Dato rješenje je testirano više puta na nekoliko različitih primjera, od kojih će jedan biti predstavljen.

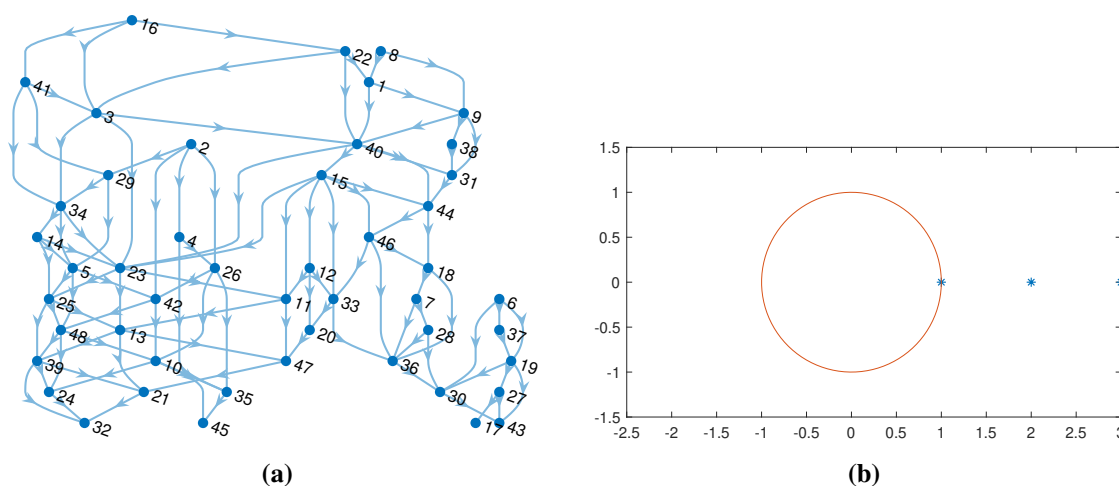
Na početku, prilikom razvoja algoritma, kako bi testirali njegovu validnost, koristili smo nasumično generisane matrice susjedstva kojima bi zadavali dimenzije i broj grana, uz uslov da se na glavnoj dijagonali nalaze nule, čime smo obezbjeđivali singularnost i nedijagonalizabilnost. Na taj način smo bili sigurni da će matricama susjedstva biti potrebne modifikacije u većini slučajeva, ovaj korak nije bio neophodan, ali je praktičan zbog bržeg testiranja (češće smo dobijali matrice kojima je bila potrebna modifikacija).

Obezbiđeno je da, uz izuzetno male, već objašnjene, modifikacije, dobijemo matricu susjedstva skoro identičnu originalnoj, čija analiza je, upravo zbog ovoga, vjerodostojna.

Rezultate koji će biti prikazani u nastavku predstavljaju set podataka "USA Temperature Map". Čvorovi grafa su gradovi, čiji signali predstavljaju temperature zadatih gradova. Grane su međusobno povezani gradovi, tako da veza između njih postoji ukoliko se oni nalaze u susjednim saveznm državama, odnosno državama koje dijele granicu. Takođe, još jedan važan detalj se odnosi na usmjerenje, a ono je definisano tako da strelice pokazuju od južnijeg ka sjevernijem gradu.



**Slika 5.1:** Vizuelni prikaz čvorova i grana matrice susjedstva izvučene iz korištenog seta podataka.



**Slika 5.2:** (a) Orijentisani graf matrice susjedstva. (b) Sopstvene vrijednosti prikazane u odnosu na jediničnu kružnicu.

Na slikama 5.1 i 5.2 prikazani su: vizuelni prikaz podataka u obliku grafa, graf, sopstvene vrijednosti.

Prvo treba napomenuti kako smo došli do zaključka da je neophodna modifikacija matrice. Prva provjera koja je vršena odnosila se na determinantu, za koju smo dobili vrijednost nula, samim tim znamo da se radi o singularnoj matrici susjedstva. Još jedan argument koji nam govori da se radi o singularnoj matrici je rang koji ima vrijednost 42. Kako je, u našem slučaju, matrica susjedstva dimenzija  $48 \times 48$ , to znači da bi puni rang matrice morao biti 48. O nedijagonalizabilnosti nam govore sopstvene vrijednosti koje imaju vrijednosti nula.

Osvrnućemo se još kratko na vrijednost ranga matrice i šta još možemo zaključiti na osnovu njega. Naime, već je rečeno da bi puni rang ove matrice susjedstva trebao biti 48, a da je on, prije modifikacije, 42. To bi značilo da ćemo prilikom modifikacije dodati tačno 6 grana kako bi dobili puni rang i obezbijedili sve potrebne uslove (nesingularnost i dijagonalizabilnost) za dalju analizu grafa. Tačnije, to bi značilo da ćemo imati 6 linearno zavisnih redova i kolona koje ćemo međusobno povezati. Znamo da se radi o 6 linearno zavisnih redova i kolona na osnovu relacije:

$$\text{broj nedostajućih grana} = \text{puni rang matrice} - \text{trenutni rang matrice}$$

Nakon što smo utvrdili da je modifikacija neophodna našli smo linearno zavisne redove i kolone i dobili da su to:

*Linearno zavisni redovi: 2, 6, 8, 16, 40, 41*

*Linearno zavisne kolone:* 17, 24, 32, 43, 45, 48

Zatim smo na tim mjestima, spajanjem kolona i redova (sa tim usmjerejem, od linearno zavisne kolone, ka linearno zavisnom redu) dodavali grane sa eksperimentalno određenom malom težinom. Na slikama 5.3 i 5.4a su, crvenom bojom, prikazane dodate grane.

Rezultati dobijeni nakon modifikacije su prikazani na slikama 5.3, 5.4 i 5.5.

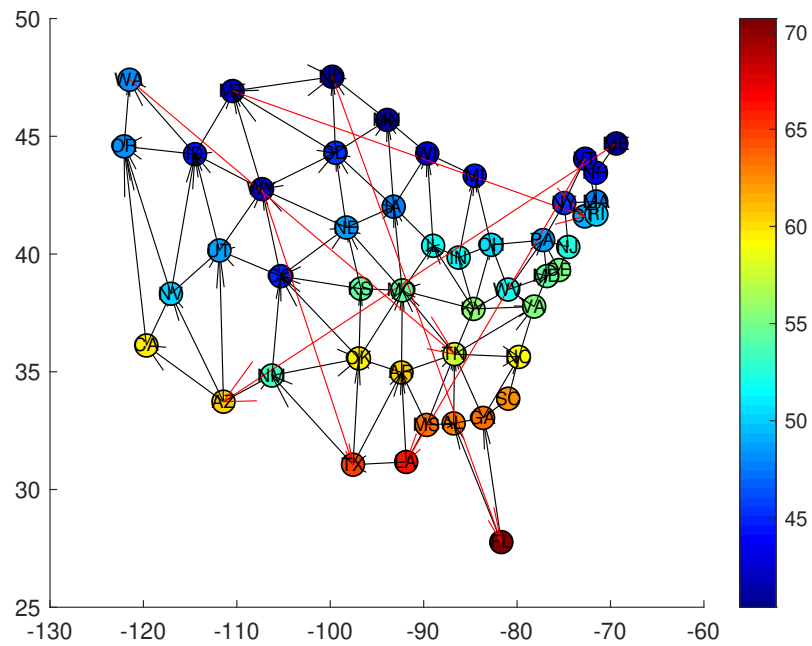
Sada možemo preći na rezultate dobijene nakon modifikacije matrice susjedstva. Prva izvršena provjera uspješnosti algoritma je bila determinanta. Naime, ukoliko dobijemo determinantu različitu od nule, znači da smo uspjeli da formiramo nesingularnu matricu. Vrijednost koju smo dobili je bila  $2.0000 \times 10^{-18}$ , što bi značilo da algoritam ispunjava početne hipoteze. Međutim, kao što je već rečeno determinanta nije jedini kriterijum koji govori o (ne)singularnosti matrice, već je bilo neophodno provjeriti i rang, kako bi bili sigurni. Nakon modifikacije, prilikom provjere, utvrđeno je da je rang matrice postao pun, tačnije da je njegova vrijednost sada 48. Nakon ove provjere smo sigurni da smo dobili nesingularnu matricu.

Još jedna stvar koju je bilo neophodno provjeriti su sopstvene vrijednosti koje govore o (ne)dijagonalizabilnosti. Naime, kao što je već rečeno, na početku smo imali sve sopstvene vrijednosti jednake nuli, što nam je govorilo o nedijagonalizabilnosti matrice susjedstva. Nakon modifikacije sve sopstvene vrijednosti su bile različite od nule, što nam predstavlja još jednu potvrdu uspješnosti algoritma i dobijanja dijagonalizabilne matrice.

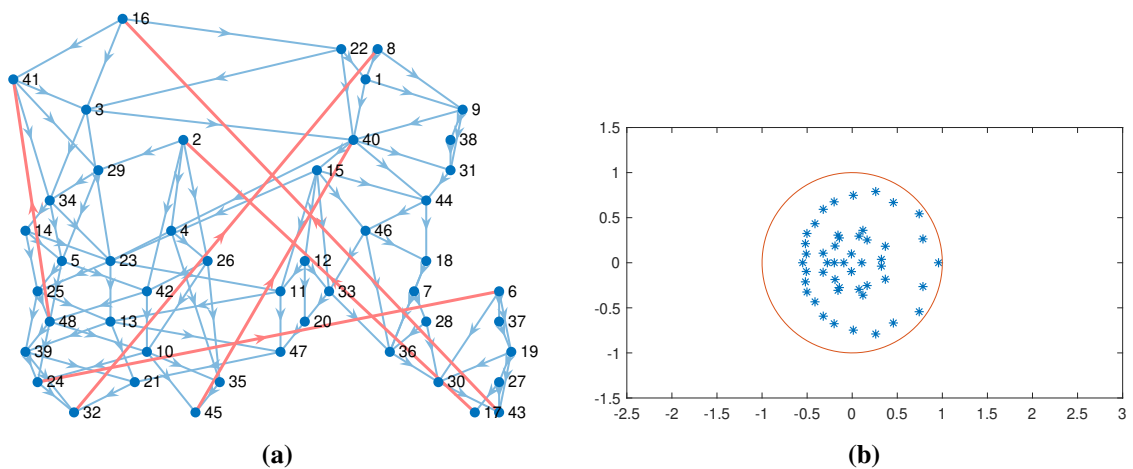
Međutim, sopstvene vrijednosti nam nijesu služile samo kao provjera uspješnosti algoritma u domenu omogućavanja analize signala koristeći Furijeovu transformaciju, već i za provjeru stabilnosti sistema. Eksperimentalnim putem je utvrđeno da se stabilniji sistem dobija što su težine dodatih grana manje. U ovom slučaju težina dodatih grana je bila 0.001.

<b>Sopstvene vrijednosti nakon modifikacije</b>	
$0.9575 + 0.0000i$	$-0.5090 + 0.0970i$
$0.7434 + 0.5429i$	$-0.5090 - 0.0970i$
$0.7434 - 0.5429i$	$0.3242 + 0.0378i$
$0.7850 + 0.2643i$	$0.3242 - 0.0378i$
$0.7850 - 0.2643i$	$0.1190 + 0.3597i$
$0.2610 + 0.7901i$	$0.1190 - 0.3597i$
$0.2610 - 0.7901i$	$0.1655 + 0.2526i$
$0.4567 + 0.6679i$	$0.1655 - 0.2526i$
$0.4567 - 0.6679i$	$0.0754 + 0.2953i$
$0.0125 + 0.7474i$	$0.0754 - 0.2953i$
$0.0125 - 0.7474i$	$-0.1576 + 0.3063i$
$-0.2003 + 0.6759i$	$-0.1576 - 0.3063i$
$-0.2003 - 0.6759i$	$-0.1421 + 0.2753i$
$-0.3210 + 0.5925i$	$-0.1421 - 0.2753i$
$-0.3210 - 0.5925i$	$0.1067 + 0.0000i$
$-0.4127 + 0.4333i$	$-0.3224 + 0.1061i$
$-0.4127 - 0.4333i$	$-0.3224 - 0.1061i$
$-0.5020 + 0.3246i$	$-0.1905 + 0.1858i$
$-0.5020 - 0.3246i$	$-0.1905 - 0.1858i$
$0.3677 + 0.1829i$	$-0.0083 + 0.0980i$
$0.3677 - 0.1829i$	$-0.0083 - 0.0980i$
$-0.5188 + 0.2118i$	$-0.0930 + 0.0000i$
$-0.5188 - 0.2118i$	$-0.2755 + 0.0000i$
$-0.5494 + 0.0000i$	$-0.1980 + 0.0000i$

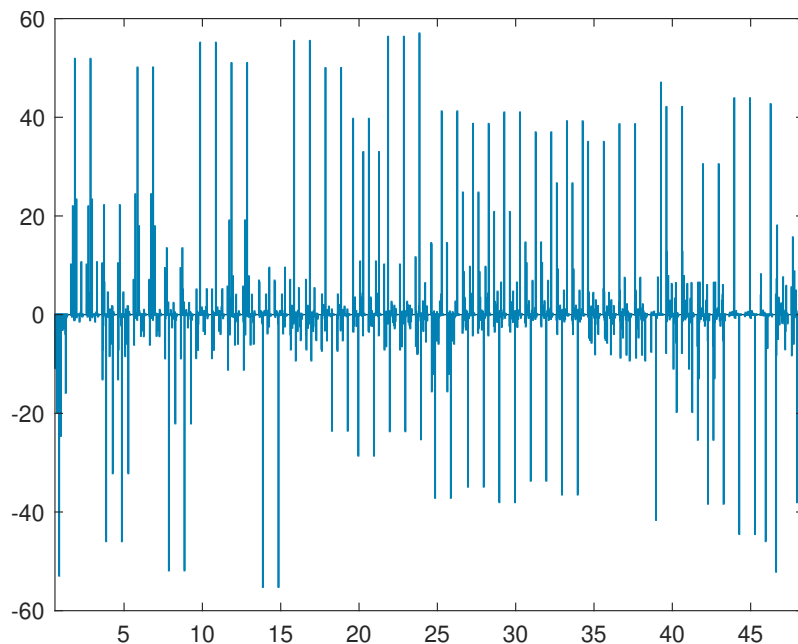
**Tabela 5.1:** Tabela sopstvenih vrijednosti nakon modifikacije



**Slika 5.3:** Vizuelni prikaz čvorova i grana matrice susjedstva izvučene iz korištenog seta podataka nakon modifikacije.



**Slika 5.4:** (a) Orijentisani graf modifikovane matrice susjedstva. (b) Sopstvene vrijednosti, dobijene nakon modifikacije matrice susjedstva, prikazane u odnosu na jediničnu kružnicu.



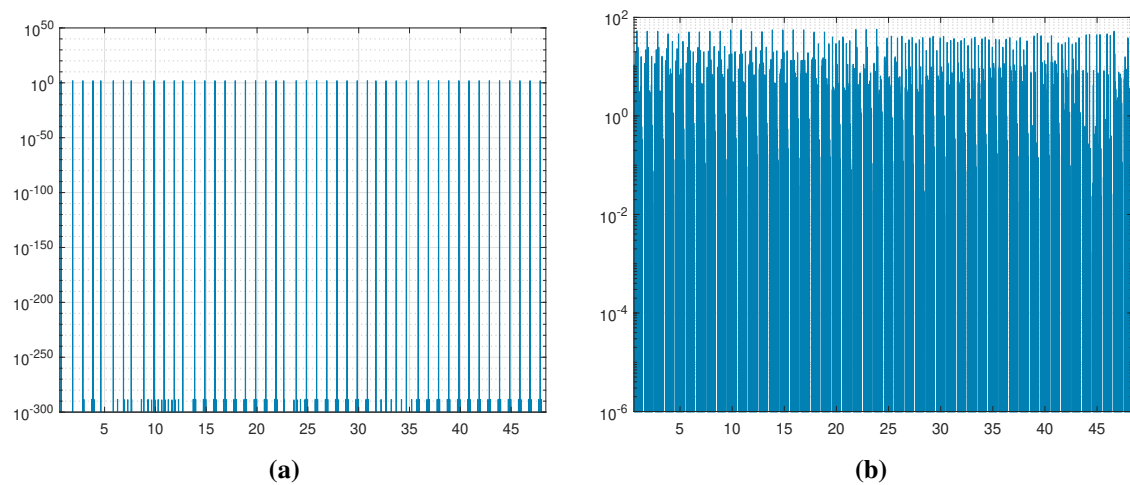
**Slika 5.5:** Furijeova transformacija modificiranog grafa.

Sa grafika 5.5, koji predstavlja Furijeovu transformaciju nakon modifikacije, odmah se može primijetiti da je situacija mnogo drugačija, odnosno da se spektralna analiza može obaviti. Dakle, sada možemo uočiti, nenulte sopstvene vrijednosti imaju mogućnost da uhvate mnogo više informacija koje signal prenosi, samim tim i obezbjeđuje vjerodostojnu spektralnu analizu. Domen u kojem se frekvencije kreću, u ovom slučaju je  $[-55.2278\text{Hz}, 57.0337\text{Hz}]$ . Vidimo da je širina opsega nešto drugačija, što znači da modifikacija koja je uvedena unosi male promjene u sistem, međutim ova odstupanja su minimalna, naročito u pogledu mogućnosti izvođenja spektralne analize. Svakako, ovo nije način na koji je utvrđeno koliko se originalni graf razlikuje u odnosu na modificovani, već je korišten SNR i dobijena je vrijednost  $72.4304\text{dB}$ .

Dakle, SNR od  $72.4304\text{dB}$  u ovom primjeru, gdje signali predstavljaju temperature koje se kreću u rasponu od  $40.4$  do  $70.7$  stepeni, ukazuje na to da su razlike između originalnog i modificovanog signala zaista minimalne, kako je to i bilo pretpostavljeno u početnoj hipotezi. Ovaj visok SNR sugeriše da je snaga signala (temperatura) znatno veća od snage šuma (modifikacija, tačnije dodavanje grana sa malim težinama). To znači da informacije o temperaturama koje signal prenosi nijesu značajno narušene šumom. Viši SNR znači da signal ima jasnu prednost u odnosu na šum, čime se potvrđuje tačnost i vjerodostojnost rezultata spektralne analize.

Dodatno, može se primijetiti da grafikon ima sinusoidni karakter, što olakšava identi-

fikaciju dominantnih frekvencija i ukazuje na stabilnost i periodičnost signala.



**Slika 5.6:** (a) Vrijednosti Furijeove transformacije grafova predstavljene na logaritamskoj skali. Signal prije modifikacije. (b) Signal nakon modifikacije.

Radi boljeg predstavljanja broja korisnih karakteristika i informacija prije i poslije modifikacije, vrijednosti Furijeove transformacije su predstavljene na logaritamskoj skali, što je i prikazano na slici 5.6.

Broj informacija koje smo dobili, nenulatih frekvencija, određen je koristeći MATLAB ugrađenu funkciju:

$$nnz(\text{FurijeovaTrans})$$

gdje je *FurijeovaTrans* matrica vrijednosti Furijeove transformacije. Dobijeno je 132 nenulatih frekvencija, od ukupno 2304, što čini 5.7292% ukupnog procenta informacija koje smo dobili, tačnije procenat frekvencija koje se nijesu izgubile zbog nulatih sopstvenih vrijednosti. Međutim, na slici 5.6a možemo uočiti da samo 48 vrijednosti ima korisne informacije, dok 84 imaju vrijednosti približne  $10^{-300}$  što možemo smatrati računskom ili statističnom greškom i ne možemo dobiti korisne informacije iz tih podataka. Iz ovog razloga je postavljena minimalna vrijednost korisnih informacija na  $10^{-10}$ , sve ispod ovoga je smatralno nulom, odnosno smatrano je da ne daje bilo kakve informacije. Nakon ovoga smo sa 5.7292% ukupnog procenta informacija, došli do 2.0833% korisnih informacija. Na osnovu svega navedenom dolazi se do zaključka da je spektralna analiza u ovom i sličnim slučajevima neefikasna i da su neophodne modifikacije kako bi se analiza mogla obaviti koristeći Furijeovu transformaciju.



vrijednosti u centru jedinične kružnice što znači da je sistem stabilan.

Sopstvene vrijednosti nakon modifikacije		
$0.1277 + 0.0000i$	$0.1179 + 0.0479i$	$0.0128 - 0.0091i$
$0.1179 - 0.0479i$	$0.0906 + 0.0877i$	$0.0111 + 0.0111i$
$0.0906 - 0.0877i$	$0.0511 + 0.1135i$	$0.0111 - 0.0111i$
$0.0511 - 0.1135i$	$0.0061 + 0.1224i$	$0.0039 + 0.0152i$
$0.0061 - 0.1224i$	$-0.0378 + 0.1146i$	$0.0039 - 0.0152i$
$-0.0378 - 0.1146i$	$-0.0749 + 0.0925i$	$0.0014 + 0.0156i$
$-0.0749 - 0.0925i$	$-0.1015 + 0.0598i$	$0.0014 - 0.0156i$
$-0.1015 - 0.0598i$	$-0.1154 + 0.0207i$	$-0.0068 + 0.0141i$
$-0.1154 - 0.0207i$	$0.0797 + 0.0200i$	$-0.0068 - 0.0141i$
$0.0797 - 0.0200i$	$0.0607 + 0.0550i$	$-0.0089 + 0.0128i$
$0.0607 - 0.0550i$	$0.0276 + 0.0766i$	$-0.0089 - 0.0128i$
$0.0276 - 0.0766i$	$-0.0112 + 0.0799i$	$-0.0151 + 0.0041i$
$-0.0112 - 0.0799i$	$-0.0465 + 0.0651i$	$-0.0151 - 0.0041i$
$-0.0465 - 0.0651i$	$-0.0707 + 0.0362i$	$-0.0142 + 0.0065i$
$-0.0707 - 0.0362i$	$-0.0792 + 0.0000i$	$-0.0142 - 0.0065i$
$0.0307 + 0.0091i$	$0.0307 - 0.0091i$	$0.0037 + 0.0000i$
$0.0208 + 0.0242i$	$0.0208 - 0.0242i$	$0.0023 + 0.0029i$
$0.0043 + 0.0315i$	$0.0043 - 0.0315i$	$0.0023 - 0.0029i$
$-0.0133 + 0.0288i$	$-0.0133 - 0.0288i$	$-0.0008 + 0.0036i$
$-0.0267 + 0.0170i$	$-0.0267 - 0.0170i$	$-0.0008 - 0.0036i$
$-0.0316 + 0.0000i$	$0.0157 + 0.0013i$	$-0.0033 + 0.0016i$
$0.0157 - 0.0013i$	$0.0128 + 0.0091i$	$-0.0033 - 0.0016i$

**Tabela 5.2:** Tabela sopstvenih vrijednosti nakon modifikacije

U tabeli 5.2 možemo vidjeti da nijedna sopstvena vrijednost nije jednaka nuli, na osnovu čega zaključujemo da smo obezbijedili dijagonalizabilnost. Provjerom determinante i ranga matrice susjedstva smo se uvjerali da i ova metoda obezbjeđuje nesingularnost. Determinanta je u ovom slučaju bila  $2.0000 \times 10^{-96}$ , iako izuzetno mala, u teorijskim okvirima ova vrijednost se smatra različitom od nule. Rang matrice je pun i iznosi 66. U ovom

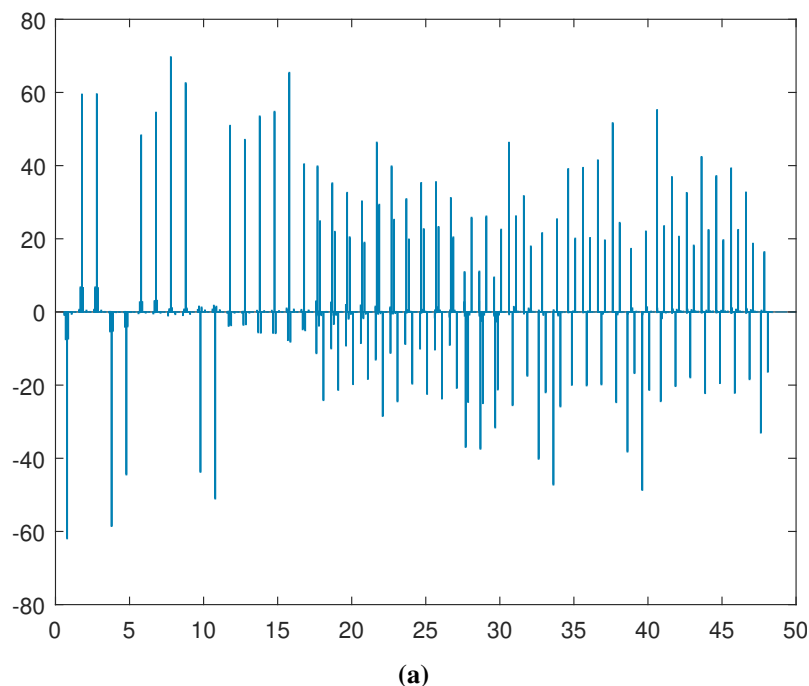
slučaju, kako dodajemo nove čvorove, dimenzija matrice susjedstva se povećava. Kako znamo da imamo 6 linearno zavisnih redova (kolona), to znači da smo duž šest dodatih grana dodati po 3 čvora. Dakle nove dimezije matrice susjedstva se određuju kao:

$$DMMS = DOMS + BLZ \times BDC$$

- DMMS - dimezije modifikovane matrice susjedstva
- DOMS - dimezije originalne matrice susjedstva
- BLZ - broj linearno zavisnih redova (kolona)
- BDC - broj dodatih čvorova duž jedne grane

Dobijeni SNR u ovom primjeru je  $86.4098dB$  što znači da je signal koji se prenosi mnogo jači od šuma i da ćemo na izlazu, odnosno nakon modifikacije, imati signal gotovo identičan originalnom.

U oba slučaja smo došli do zaključka da SNR raste kako se težine smanjuju. Međutim, ovo polje i dalje nije istraženo, zaključci su izvedeni na osnovu eksperimentalnih dokaza.



**Slika 5.8:** Furijeova transformacija modifikovane matrice susjedstva.

Na slici 5.8 je prikazana Furijeova transformacija i na osnovu nje možemo zaključiti da je i u ovom slučaju spektralna analiza omogućena, postoje obrasci, različite frekvencije na osnovu kojih se može izvršiti analiza. Međutim, kako su neke sopstvene vrijednosti

jako blizu nule, nijesu sve frekvencije i karakteristike signala uspjeti da uhvate, tako da je u ovom slučaju, od ukupno 4356 frekvencijskih komponenti uhvaćeno 3168, što je u procentima 72.7273. Naravno, sve ove vrijednosti su promjenljive i u zavisnosti od parametara dobićemo različite rezultate. Dakle, dok se ne automatizuje proces određivanja težine grana i broja čvorova, eksperimentisanjem se trudimo da dobijemo što bolje rezultate. Međutim, možemo vidjeti da su obje metode uspješne i da ispunjavaju početne hipoteze.

# Zaključak

Ovo istraživanje uspješno rješava izazov primjene tehnika Furijeove transformacije na orijentisane grafove, što je ključni alat za analizu frekventnih komponenti signala na grafovima. Predloženi pristup podrazumijeva proširivanje originalnog usmjerenog grafa dodatnim granama sa, eksperimentalno određenim, težinama manjim od jedan, čime se obezbjeđuje da rezultujuća matrica susjedstva postane nesingularna i dijagonalizabilna. Ova modifikacija omogućava primjenu i spektralnu analizu koristeći Furijeove transformacije na proširenom grafu, odnosno modifikovanoj matrici susjedstva.

Ovim istraživanjem se pokazuje da uvođenje grana sa malim težinama rezultira modifikovanim grafom koji ostaje sličan originalnom, u smislu karakteristika obrade signala, što nam obezbjeđuje vjerodostojnu spektralnu analizu. Takođe, pokazano je da su sve hipoteze postavljene u uvodnom dijelu rada (Glava 1) potvrđene. Vidjeli smo da je omogućena Furijeova transformacija i pokazano je da se modifikovani graf ne razlikuje u velikoj mjeri od originalnog.

Ovi rezultati imaju značajne primjene za oblasti kao što su društvene mreže, komunikacione mreže i druge domene gde se složene interakcije predstavljaju grafovima, odnosno gdje podaci ne mogu biti predstavljeni u jednom domenu. Omogućavanjem primjene Furijeove transformacije na usmjerene grafove, omogućava se i poboljšava spektralna analiza signala predstavljenih na grafovima.

Dva segmenta ovog rada zahtijevaju dodatna i dalja istraživanja. Eksperimentalno određivanje težina dodatnih grana i broj čvorova, u drugom slučaju, nije dobar pristup. Dakle, neka od budućih istraživanja bi trebala biti usmjerena ka načinu određivanja optimalne vrijednosti težina i broja dodatnih čvorova, kako bi se ovaj proces što više automatizovao i uštedjelo vrijeme koje je neophodno da se dođe do najboljeg rezultata.

# Literatura

- [1] Rahul Singh, Abhishek Chakraborty, and BS Manoj. Graph fourier transform based on directed laplacian. In *2016 International Conference on Signal Processing and Communications (SPCOM)*, pages 1–5. IEEE, 2016.
- [2] Satoshi Furutani, Toshiki Shibahara, Mitsuaki Akiyama, Kunio Hato, and Masaki Aida. Graph signal processing for directed graphs based on the hermitian laplacian. In *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases: European Conference, ECML PKDD 2019, Würzburg, Germany, September 16–20, 2019, Proceedings, Part I*, pages 447–463. Springer, 2020.
- [3] Yang Chen, Cheng Cheng, and Qiyu Sun. Graph fourier transform based on singular value decomposition of the directed laplacian. *Sampling Theory, Signal Processing, and Data Analysis*, 21(2):24, 2023.
- [4] Ljubisa Stankovic, Milos Dakovic, Ali Bagheri Bardi, Milos Brajovic, and Isidora Stankovic. Fourier analysis of signals on directed acyclic graphs (dag) using graph zero-padding. *arXiv preprint arXiv:2311.01073*, 2023.
- [5] Ljubiša Stanković, Miloš Daković, Miloš Brajović, Isidora Stanković, and Ali Bagheri Bardi. Zero-padding on connected directed acyclic graphs for spectral processing. In *2023 31st Telecommunications Forum (TELFOR)*, pages 1–4. IEEE, 2023.
- [6] Bastian Seifert, Chris Wendler, and Markus Püschel. Learning fourier-sparse functions on dags. In *ICLR2022 Workshop on the Elements of Reasoning: Objects, Structure and Causality*, 2022.
- [7] Bastian Seifert, Chris Wendler, and Markus Püschel. Causal fourier analysis on directed acyclic graphs and posets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 71:3805–3820, 2023.

- [8] Rasoul Shafipour, Ali Khodabakhsh, Gonzalo Mateos, and Evdokia Nikolova. A digraph fourier transform with spread frequency components. In *2017 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*, pages 583–587. IEEE, 2017.
- [9] Keng-Shih Lu and Antonio Ortega. Fast graph fourier transforms based on graph symmetry and bipartition. *IEEE transactions on signal processing*, 67(18):4855–4869, 2019.
- [10] Lidija Vuksanovic, Ali Bagheri Bardi, Miloš Dakovic, Taher Yazdanpanah, and Ljubiša Stankovic. Refining directed graphs for spectral analysis through strategic topological modifications. *ResearchGate*, 2024.
- [11] Edward C Kirby, Roger B Mallion, Paul Pollak, and Paweł J Skrzyński. What kirchhoff actually did concerning spanning trees in electrical networks and its relationship to modern graph-theoretical work. *Croatica Chemica Acta*, 89(4):403–417, 2016.
- [12] Anandhan Prathik, K Uma, and J Anuradha. An overview of application of graph theory. *International Journal of ChemTech Research*, 9(2):242–248, 2016.
- [13] Basudeb Mondal and Kajal De. An overview applications of graph theory in real field. *International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology*, 2(5):751–759, 2017.
- [14] Pavao Jerebić. *Optimizacija pronalaženja najkraćeg puta uz dinamičko okruženje*. PhD thesis, University of Zagreb. Faculty of Electrical Engineering and Computing, 2018.
- [15] Google. Google Maps. <https://www.google.com/maps>, Pristup 2024. Pristupljeno: 10. septembar 2024.
- [16] Chen Wang, Travis Atkison, and Hana Park. Dynamic adaptive vehicle re-routing strategy for traffic congestion mitigation of grid network. *International Journal of Transportation Science and Technology*, 14:120–136, 2024.
- [17] Philip Steensma. *The Role of Real-time Information in Traffic Networks*. PhD thesis, University of Groningen, Faculty of Science and Engineering, 2024.

- [18] Tiberiu Leția Honoriu Vălean Adina Aștilean and Mihai Hulea. Real-time information and control system for urban vehicle traffic. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 2005.
- [19] Ljubiša Stanković, Danilo Mandić, Miloš Daković, Miloš Brajović, Bruno Scalzo, Shengxi Li, Anthony G Constantinides Constantinides, et al. *Data analytics on graphs part III: Machine learning on graphs, from graph topology to applications*. Now Publishers, Inc., 2020.
- [20] Douglas B West. *Introduction to graph theory*, 2001.
- [21] Srđan Lazendić. *Matematički alati za redukciju dimenzionalnosti signala*. Master's thesis, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-Matematički Fakultet, Novi Sad, 2016. Master rad.
- [22] Isabela F Apolinário and Paulo SR Diniz. Introduction to signal processing theory. In *Academic press library in signal processing*, volume 1, pages 3–28. Elsevier, 2014.
- [23] Ashok Amardar et al. *Analog and digital signal processing*. PWS Boston, MA, USA, 1995.
- [24] Li Tan and Jean Jiang. *Digital signal processing: fundamentals and applications*. Academic press, 2018.
- [25] Kulkarni R Sanjeev. *Lecture notes for ele201 introduction to electrical signals and systems*, 2002.
- [26] Alan V Oppenheim. *Discrete-time signal processing*. Pearson Education India, 1999.
- [27] Ljubisa Stankovic, Danilo P Mandic, Milos Dakovic, Ilia Kisil, Ervin Sejdic, and Anthony G Constantinides. Understanding the basis of graph signal processing via an intuitive example-driven approach [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 36(6):133–145, 2019.
- [28] Antonio Ortega, Pascal Frossard, Jelena Kovačević, José MF Moura, and Pierre Vandergheynst. Graph signal processing: Overview, challenges, and applications. *Proceedings of the IEEE*, 106(5):808–828, 2018.

- [29] Marijke Welvaert and Yves Rosseel. On the definition of signal-to-noise ratio and contrast-to-noise ratio for fmri data. *PloS one*, 8(11):e77089, 2013.
- [30] Helio. Understanding signal-to-noise ratio: Why it matters, 2023. Accessed: 2024-11-07.
- [31] Hervé Abdi. The eigen-decomposition: Eigenvalues and eigenvectors. *Encyclopedia of measurement and statistics*, pages 304–308, 2007.
- [32] David C Lay. *Linear algebra and its applications*. Pearson Education India, 2003.
- [33] Carl D Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2023.
- [34] K Arulmani and K Chadracharya Rao. New perspective on a singular matrix formation. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 38(2):163–169, 2012.
- [35] Desanka Radunović. Numeričke metode. *Akadska misao*, 2003.
- [36] Fumiko Futamura. Frame diagonalization of matrices. *Linear algebra and its applications*, 436(9):3201–3214, 2012.
- [37] Nileshkumar Vaishnav and Aditya Tatu. A graph downsampling technique based on graph fourier transform. *arXiv preprint arXiv:1612.07542*, 2016.
- [38] Ali Bagheri Bardi, Taher Yazdanpanah, Milos Dakovic, and Ljubisa Stankovic. Graph fourier transform enhancement through envelope extensions. *arXiv e-prints*, pages arXiv–2407, 2024.
- [39] Ines Radošević Medvidović and Kristina Pedić. Matrične faktorizacije. *Zbornik radova (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci)*, 20(1):227–242, 2017.
- [40] Milena Bronić. *DETERMINANTE I MATRICE*. Gimnazija “Lucijan Vranjanin”, Zagreb, 1996.
- [41] Dunja Bakoš. Metode racunanja determinanti matrica n-tog reda.
- [42] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications 4th ed.* Cengage Learning, 2012.
- [43] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Springer Nature, 2024.